Bewrier Loukas
Fondrat Johan

Maths
Chap 21 TD Rendu

Exercice 6) $P_1 = \text{Vect}((2;3;-1);(1;-1;-2))$

$P_2 = \text{Vect}((3,7,0);(5,0;-7))$

Mq $P_1 = P_2$

- Vérifions si $(2,3,-1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $(3,7,0)$ et $(5,0;7)$.
C'est à dire : Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$$(2,3,-1) = \lambda(3,7,0) + \mu(5,0;7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3\lambda + 5\mu \\ 3 = 7\lambda \\ -1 = 7\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3\times\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{14}{7} = 2 \\ \lambda = \frac{3}{7} \\ \mu = +\frac{1}{7} \end{cases}$$

On a $(2,3,-1) = \frac{3}{7}(3,7,0) + \frac{1}{7}(5,0,-7)$ ✓

- Donc $(2,3,-1) \in \text{Vect}((3,7,0);(5,0,-7))$. ✓

- De même vérifions pour $(1;-1,2)$:

$$(1,-1,-2) = \lambda(3,7,0) + \mu(5,0;7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3\lambda + 5\mu \\ -1 = 7\lambda + 0\mu \\ -2 = \lambda\times 0 - 7\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\frac{3}{7} + \frac{10}{7} = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{7} \\ \mu = \frac{2}{7} \end{cases}$$

On a $(1;-1,-2) = -\frac{1}{7}(3,7,0) + \frac{2}{7}(5,0;-7)$

Donc $(1,-1;-2) \in \text{Vect}((3,7,0);(5,0;7))$ ✓

On a donc $P_2 = \text{Vect}((3,7,0);(5,0;7);(2,3,-1);(1,-1;2))$

- Vérifions si $(3,7,0)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $(2,3,-1)$ et $(1,-1;2)$.
C'est à dire :

$$(3,7,0) = \lambda(2,3,-1) + \mu(1,-1;2)$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2\lambda + \mu \\ 7 = 3\lambda - \mu \\ 0 = -\lambda - 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -4\mu + \mu \\ 7 = -6\mu - \mu \\ \lambda = -2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -1 \\ \lambda = 2. \end{cases}$

Donc $(3,7,0) = 2(2,3,-1) - (1,-1,-2)$ ✓

Donc $\underline{(3,7,0) \in \text{Vect}((2,3,-1);(1,-1,-2))}$ ✓

- De même pour $(5,0,-7)$.

$(5,0,-7) = \lambda(2,3,-1) + \mu(1,-1,-2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2\lambda + \mu \\ 0 = 3\lambda - \mu \\ -7 = -\lambda - 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5\lambda \\ \mu = 3\lambda \\ -7 = -7\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 3 \end{cases}$

Donc $(5,0,-7) = (2,3,-1) + 3(1,-1,-2)$. ✓

Donc $\underline{(5,0,7) \in \text{Vect}((2,3,-1);(1,-1,-2))}$ ✓

Donc $\underline{P_1 = \text{Vect}((5,0,7);(3,7,0);(2,3,-1);(1,-1,-2))}$ ✓

On a $\boxed{P_1 = P_2}$ ✓

Exercice 12) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E.

Mq $\underline{(f(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p) \text{ et } f(\ker(p)) \subset \ker(p)) \Leftrightarrow (f \circ p = p \circ f)}$

$\Rightarrow$ On a $p \circ p = p$ donc $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$

p est donc le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$. ✓

$\Rightarrow$ Soit $\vec{x} \in E$, $\exists!\, (\vec{x_F}, \vec{x_G}) \in \text{Im}(p) \times \ker(p)$ /

$\vec{x} = \vec{x_F} + \vec{x_G}$

- $f \circ p(\vec{x}) = f(\vec{x_F})$. ✓

- $p \circ f(\vec{x}) = p \circ f(\vec{x_F}) + p \circ f(\vec{x_G})$ (car $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$.)

Or $\exists \vec{x_H} \in \ker(p)$ / $f(\vec{x_G}) = \vec{x_H}$ (car $f(\ker(p)) \subset \ker(p)$)

et $\exists \vec{x_I} \in E$ / $p(\vec{x_I}) = f(\vec{x_F})$. (car $f(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p)$.

donc on a $p \circ p(\vec{x_I}) = p \circ f(\vec{x_F})$ donc $p \circ f(\vec{x_F}) = f(\vec{x_F})$ ✓

donc $p \circ f(\vec{x_F}) + p \circ f(\vec{x_G}) = f(\vec{x_F}) + p(\vec{x_H})$

$= f(\vec{x_F})$ car $\vec{x_H} \in \ker(f \circ p)$ ✓

On a donc $\forall x \in E$, $p \circ f(\vec{x}) = f \circ p(\vec{x})$. ✓

Donc $\boxed{p \circ f = f \circ p}$ ✓

⟸ • Soit $\vec{x'} \in f(\mathrm{Im}(p))$. donc $\exists \vec{v} \in \mathrm{Im}(p) / \vec{x'} = f(\vec{v})$.

Donc $p(\vec{x'}) = p \circ f(\vec{v}) = f \circ p(\vec{v})$. ✓

or $\vec{v} \in \mathrm{Im}(p)$ donc $p(\vec{v}) = \vec{v}$ ✓

Donc $p(\vec{x'}) = f(\vec{v}) = \vec{x'}$ donc $\boxed{\vec{x'} \in \mathrm{Im}(p)}$ ✓

• Soit $\vec{x'} \in f(\ker(p))$ donc $\exists \vec{v} \in \ker(p) / \vec{x'} = f(\vec{v})$.

Donc $p(\vec{x'}) = p \circ f(\vec{v}) = f \circ p(\vec{v})$. ✓

$\boxed{p(\vec{x'}) = f(\vec{0_E}) = \vec{0_E}}$ ($\because$ car $f \in \mathcal{L}(E)$ donc $f(\vec{0_E}) = \vec{0_E}$)

Donc $\vec{x'} \in \ker(p)$.

On a bien $\underline{f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)}$ et $\underline{f(\ker(p)) \in \ker(p)}$.

Exercice 16)

1. • Soit $\vec{x} \in \ker(f)$ alors $f(\vec{x}) = \vec{0_E}$ ✓

($\because$ car $f \in \mathcal{L}(E)$ donc $f(\vec{0_E}) = \vec{0_E}$.) ⟹ donc $f^2(\vec{x}) = f(\vec{0_E})$ ✓

$= \vec{0_E}$ ✓

On a donc $\vec{x} \in \ker(f^2)$. donc $\boxed{\ker(f) \subset \ker(f^2)}$ ✓

il manque l'inclusion ⊃.

• Soit $\vec{x'} \in \mathrm{Im}(f^2)$ alors $\exists \vec{y} \in E / f^2(\vec{y}) = \vec{x'}$

On pose $\vec{v} = f(\vec{y})$.

On a donc $\vec{x'} = f(\vec{v}) \in \mathrm{Im}(f)$.

On a bien $\boxed{\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)}$ ✓

↑ idem : il faut encore prouver ⊃.

2. Mq $(\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}_E\}) \iff (\ker(f^2) = \ker(f))$.

$\Rightarrow$ On a déjà $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

Mq $\ker(f^2) \subset \ker(f)$.

Soit $\vec{x} \in \ker(f^2)$ alors $f \circ f(\vec{x}) = \vec{0}_E$.

Or $f(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(f)$ et $f(\vec{x}) \in \ker(f)$.

Donc $f(\vec{x}) = \vec{0}_E$. donc $x \in \ker(f)$.

On a bien $[\ker(f^2) = \ker(f)]$ ✓

$\Leftarrow$ Soit $\vec{x} \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. On a $f(\vec{x}) = \vec{0}_E$.

et aussi $\exists y \in E / f(\vec{y}) = \vec{x}$.

$f(\vec{x}) = f \circ f(\vec{y}) = \vec{0}_E$. Donc $\vec{y} \in \ker(f^2) = \ker(f)$.

On a donc $f(\vec{y}) = [\vec{0}_E = \vec{x}]$

On a donc $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \vec{0}_E$. ✓