

Exercice 2.

1. $A_1 \rightarrow$ ensemble des suites croissantessoit $(u_n) \in A_1$, $((-1)u_n)$ est décroissante donc A_1 n'est pas un $\mathbb{R}$ -ev $A_2 \rightarrow$ ensemble des suites monotonesSEV 1: $A_2 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ SEV 2: La suite nulle est monotone, $A_2 \neq \emptyset$ SEV 3: Soit $(u, v) \in A_2^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, λu est monotoneSi on prend $(u_n) = (2n)$ et $(v_n) = (n^2)$, donc $(u_n + v_n) = (2n + n^2) = (n(2+n))$,On a $u_0 + v_0 = 0$

$$u_1 + v_1 = 1$$

$$u_2 + v_2 = 0$$

 $\Rightarrow$ donc $u+v$ n'est pas monotone2. $B \rightarrow$ ensemble des suites bornéesSEV 1: $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ SEV 2: La suite nulle est bornée, $B \neq \emptyset$ SEV 3: Soit $(u, v) \in B^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq a$ et $|v_n| \leq b$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda u_n| + |v_n| \leq |\lambda| |u_n| + |v_n| \leq |\lambda| a + b$$

Donc $\lambda u + v$ est bornée3. $C \rightarrow$ ensemble des suites périodiquesSEV 1: $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ SEV 2: La suite nulle est périodique, $C \neq \emptyset$ SEV 3: Soit $(u, v) \in C^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\exists (T_1, T_2) \in \mathbb{N}^{*2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+T_1} = u_n$ et $v_{n+T_2} = v_n$ Soit $T_3 := T_1 \times T_2$ alors u et v sont toutes les 2 T_3 -périodiques.

$$\text{Alors } \lambda u_{n+T_3} + v_{n+T_3} = \lambda u_n + v_n$$

ainsi $(\lambda u + v) \in C$

Exercice 3 :

1. $A = \{ f \in F / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \}$

SEV1: $\tilde{1} \in A$ et $\lambda = -2$

alors $-2 \times \tilde{1} + \tilde{1} = -\tilde{1} \notin A$

Donc A n'est pas stable par combi. linéaire ✓

2. $B = \{ f \in F / f \text{ dérivable et } f'(1) = 0 \}$

SEV1: $B \subset F$ ✓

SEV2: $\tilde{0}$ est dérivable et $\tilde{0}'(1) = 0$, d'où $B \neq \emptyset$ ✓

SEV3: Soit $(f, g) \in B^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$h := \lambda f + g$ est dérivable ✓

d'où $h'(1) = \lambda f'(1) + g'(1) = 0$ ✓

Donc $\lambda f + g \in B$ ✓

3. $C = \{ f \in F / f(0) = 1 \}$

SEV2: $\tilde{0}(0) \neq 1$, donc C ne peut pas être un $\mathbb{R}$ -ev ✓

4. D_1 et D_2 les fonctions injectives et surjectives

SEV2: $\tilde{0}(1) = 0 = \tilde{0}(2)$

↳ donc ni injective ni surjective.

D'où D_1 et D_2 ne peuvent pas être des $\mathbb{R}$ -ev ✓

5. $E = \{ f \in F / f \text{ continue et } \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \}$

SEV1: $\tilde{0} \in E$ ✓

SEV2: $\int_{-1}^1 \tilde{0}(x) dx = [0]_{-1}^1 = 0$, ie $\tilde{0} \in E$, d'où $E \neq \emptyset$ ✓

SEV3: Soit $(f, g) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_{-1}^1 \lambda f(x) + g(x) dx = \lambda \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 g(x) dx = 0$$

d'où $\lambda f + g \in E$ ✓

Exercice 12:

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E .

$f(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p) \iff f$ et p commutent
et $f(\text{ker}(p)) \subset \text{ker}(p)$

$\Rightarrow$ $f(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p)$ et $f(\text{ker}(p)) \subset \text{ker}(p)$

car p projette
sur $\text{Im}(p)$ parallèlement
à $\text{ker}(p)$.

Calculons $p \circ f$ et $f \circ p$. soit $\vec{x} \in E$, $\vec{x} = \vec{x}_i + \vec{x}_k$

$$f \circ p(\vec{x}) = f(p(\vec{x}_i + \vec{x}_k)) = f(\vec{x}_i) \quad \checkmark$$

$\in \text{Im}(p)$ donc $p(f(\vec{x}_i)) = f(\vec{x}_i)$

$$p \circ f(\vec{x}) = p(f(\vec{x}_i + \vec{x}_k)) = p(f(\vec{x}_i) + f(\vec{x}_k)) = p(\underbrace{f(\vec{x}_i)}_{\in \text{Im}(p)}) + p(\underbrace{f(\vec{x}_k)}_{\in \text{ker}(p)}) = f(\vec{x}_i)$$

Donc $p \circ f(\vec{x}) = f \circ p(\vec{x})$, ce qui est vrai $\forall \vec{x} \in E$ donc $p \circ f = f \circ p$

$\Leftarrow$ On suppose que f et p commutent

Si $\vec{x} \in \text{Im}(p)$, $p(\vec{x}) = \vec{x} \quad \checkmark$ donc $f(p(\vec{x})) = f(\vec{x})$ or $f \circ p = p \circ f$

donc $p(f(\vec{x})) = f(\vec{x})$

ainsi $f(\vec{x}) \in \text{Im}(p) \quad \checkmark$

Donc $\text{Im}(p)$ est stable par $f \quad \checkmark$

Si $\vec{x} \in \text{ker}(p)$, $p(\vec{x}) = \vec{0}_E$

$$\text{or } f(p(\vec{x})) = p(f(\vec{x}))$$

$$\text{donc } f(\vec{0}_E) = p(f(\vec{x}))$$

$$\text{donc } \vec{0}_E = p(f(\vec{x})) \quad \checkmark \text{ car } f$$

ainsi $f(\vec{x}) \in \text{ker}(p) \quad \checkmark$

Donc $\text{ker}(p)$ est stable par $f \quad \checkmark$