

Bewprier
Louban
Jokan
Fondrat

On rappelle le DL de $\tan$ en 0 à l'ordre 3:

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Exercice 6)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan(x) - \tan(2x)}{x(1 - 3 \cos(3x))} \leftarrow f$
 $\leftarrow g$

DL en 0 à l'ordre 3 de f :

$$\begin{aligned} 2 \tan(x) - \tan(2x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(2x + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3)\right) \checkmark \\ &= 2x + \frac{2x^3}{3} - 2x - \frac{8x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) = -6 \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \checkmark \end{aligned}$$

DL en en 0 à l'ordre 3 de g :

$$\begin{aligned} 1 - 3 \cos(3x) &= 1 - \left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \\ &= \frac{9x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \checkmark \end{aligned}$$

On trouve:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan(x) - \tan(2x)}{x(1 - 3 \cos(3x))} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2x^3}{\frac{9x^2}{2}} = \underline{\underline{-\frac{4}{9}}}$$

Donc la limite cherchée vaut $-\frac{4}{9}$.

b) On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan(x) - \frac{\pi x + 1}{2x + 1} \right)$

On rappelle $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
 $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$.

On a:

$$\begin{aligned} x \left(\arctan(x) - \frac{\pi x + 1}{2x + 1} \right) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi x + 1}{2x + 1} \right) \\ &= \frac{\pi x}{2} - 1 - \frac{\pi x^2 + x}{2x + 1} = \frac{x \pi (2x + 1) - 4x - 2 - 2\pi x^2 - 2x}{4x + 2} \\ &= (\pi x - 6x - 2) / (4x + 2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi x + 1}{2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x - 6x - 2}{4x + 2} = \frac{\pi - 6}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$$