

exercice 7

On Δ est un sous $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ser 1) Δ est un ensemble de matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels

donc $\Delta \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ✓

ser 2) si on prend $(a, b) = 0$

on a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ et $O_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\Delta \neq \emptyset$ ✓

ser 3) On soient A et B appartenant à Δ , et $\lambda \in \mathbb{R}$, on

a $\lambda A + B \in \Delta$

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a + c & -(\lambda b + d) \\ \lambda b + d & \lambda a + c \end{pmatrix}$$

car on a $\lambda a + c$
et $\lambda b + d$ appartiennent
à $\mathbb{R}$

donc $\boxed{\lambda A + B \in \Delta}$ ✓

TD 20

exercice 10

1) $\sqrt{x^2 + x + 2} = |x| \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^{1/2}$

étude en $+\infty$ $|x| = x$

$u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$(1+u)^{1/2} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$ ✓

$\underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2} - \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{8} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ Non, c'est $o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$\underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} - \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$
+ $o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$$\text{donc } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} - \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right)$$

$$\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} + x + \frac{3}{8x} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$y = x + \frac{1}{2}$ est une ~~courbe~~ ^{droite} asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

comme au voisinage de $+\infty$, $\frac{3}{8x} > 0$

donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote ✓

étude en $-\infty$ $|x| = -x$

$$f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} -x \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} - \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right)$$

$$\underset{x \rightarrow -\infty}{=} -\frac{1}{2} - x - \frac{3}{8x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$

comme au voisinage de $-\infty$, $-\frac{3}{8x} > 0$, $\mathcal{C}_f$ se situe au dessus de l'asymptote ✓.

2) $f: x \rightarrow (x^2(x-2))^{1/3} = x \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{1/3}$ ✓ $u = -\frac{2}{x}$

$$(1+u)^{1/3} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + o(u^2) \quad \checkmark$$

en $+\infty$

$$\underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{2}{3x} - \frac{\frac{4}{x^2}}{9} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{2}{3x} - \frac{4}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \checkmark$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \checkmark$$

$y = x - \frac{2}{3}$ est ~~une~~ ^{l'équation de l'} asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

et au voisinage de $+\infty$ $-\frac{4}{9x} < 0$, $\mathcal{C}_f$ se situe en dessous de l'asymptote ✓

en $f(x) \rightarrow -\infty$, $f(x)$ a le même DL

donc $y = x - \frac{2}{3}$ est ~~une~~ ^{l'équation de l'} asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$

et au voisinage de $-\infty$ $-\frac{4}{9x} > 0$, $\mathcal{C}_f$ se situe au dessus de l'asymptote ✓