

Noah
Corbi

TD 20 : Analyse asymptotique

Ex 1:

Méthode directe :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \quad \checkmark$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \quad \checkmark$$

$$\text{Donc } \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right)}$$

$$\text{On pose } u \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{1-u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + o(u^5)$$

Rem : comme $u \sim \frac{x^2}{2}$
 $o(u^3) = o(x^6)$

or lorsque $x \rightarrow 0$, on a $u \rightarrow 0$

écrire

24 au lieu
de 4! ce
sera plus
compréhensible
(pour les
simplifications
de fractions)

Donc :

$$\frac{1}{1-u} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} \right) + \frac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} + o(x^5) \quad \checkmark$$

$$\text{Ainsi : } \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} + o(x^5) \right) \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} \right) + \frac{5}{4!} x^5 + o(x^5) \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + o(x^5) \quad \checkmark$$

Méthode "int/dér" :

$$= \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$$

On a $f'(x) = 1 + f^2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = x + o(x)$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1 + (x + o(x))^2 = 1 + x^2 + o(x^2) \quad \checkmark$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

- $f'(x) = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \quad \checkmark$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5) \quad \checkmark$

~~Ex 7~~

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 1 + x^2 + x^3 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$