

# TD20. Analyse asymptotique.

## Exercice 7.

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \times \underbrace{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\substack{\xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{ bornée} \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}}$$

$$\text{donc } x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o_{x \rightarrow 0}(x^2) \quad \checkmark$$

$$\text{Donc } f \text{ admet un DL à l'ordre 2 en 0: } f(x) = 1 + x + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \underbrace{x}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} + \underbrace{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

Rem: le D.L. 1 en 0 nous donne la valeur de la dérivée directement

$$f'(0) = 1 \quad \triangle$$

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^3 \times \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x} \quad \checkmark \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 + 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \checkmark \end{aligned}$$

N'écouter pas  $f''(0)$  car justement, il faut prouver que ceci n'existe pas. Dites plutôt que vous calculez cette limite

$$\text{Or } \frac{3x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{ bornée}} \rightarrow 0$$

mais  $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'a pas de limite  
donc  $f''(0)$  n'existe pas.

## Exercice 6:

$$1) \tan x \sim x \quad \checkmark \quad \tan x = x + o(x)$$

$$2) \tan x \sim 2x + o(x) \quad \checkmark \quad \tan 2x = 2x + o(x)$$

$$\text{à l'ordre 1: } 2 \tan x - \tan 2x = 0 + o(x)$$

$$\begin{aligned} \tan' &= 1 + \tan^2 = 1 + (x + o(x))^2 \\ &= 1 + x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\tan(x) = \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} 2 \tan x - \tan 2x &= 2x + \frac{2x^3}{3} - 2x - \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3) \\ &= \frac{2x^3 - 8x^3}{3} + o(x^3) \\ &= -\frac{6}{3} x^3 + o(x^3) \quad \checkmark \\ &= -2x^3 + o(x^3) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 2 \tan x - \tan 2x \sim -2x^3 \quad \checkmark$$

$$\text{et } 1 - \cos 3x \sim \frac{(3x)^2}{2} = \frac{9x^2}{2}$$

$$\text{donc } \frac{2 \tan(x) - \tan(2x)}{x(1 - \cos(3x))} \sim \frac{-2x^3}{\frac{9x^2}{2}} = -\frac{4}{9}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan(x) - \tan(2x)}{x(1 - \cos(3x))} = -\frac{4}{9}$$