

Exo 3

On a :

$$* f : \begin{cases} ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 \tan(x) - x \end{cases}$$

Hy f admet une fonction réciproque : si f est bijective de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  vers  $\mathbb{R}$  alors f admet une réciproque notée  $f^{-1}$ .

Hy f est injective : f est dérivable et  $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ,

$$f'(x) = 1 + 2 \tan^2(x) > 0 \quad / \quad f \text{ est strictement croissante sur } ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

f est bien injective ✓

Hy f est surjective :

$\tan(x)$  est def sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  donc  $2 \tan(x) - x$  l'est aussi :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \quad / \quad y = f(x).$$

$$\text{de plus} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} 2 \tan(x) - x = -\infty + \frac{\pi}{2} = -\infty \quad /$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 2 \tan(x) - x = +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty \quad /$$

f est bien surjective ✓ (de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  vers  $\mathbb{R}$ ).

Alors f est bien bijective de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  vers  $\mathbb{R}$ , donc f admet

une réciproque notée  $f^{-1}$ .

à rose :

$$y = 2 \tan(x) - x$$

on peut nous intéresser à la détermination  
inverser en autre moyen de trouver le  
DL de  $f^{-1}(x)$

mais on sait  $f^{-1}(x)$   
est strictement croissante et  
impaire et de classe  $\infty$

Déterminons le DL de  $f^{-1}(x)$  :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$2 \tan(x) - x = x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{4}{15} x^5 + o(x^6)$$

$$\text{et } f(f^{-1}(x)) = x$$

On pose un DL de  $f^{-1}$  de  $\hat{m}$  forme tq  $f(f^{-1}(x))$

$$f^{-1}(x) := ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$$

$$f(f^{-1}(x)) = 2 \tan(f^{-1}(x)) - (f^{-1}(x))$$

$$= f^{-1} + \frac{2}{3}(f^{-1})^3 + \frac{4}{15}(f^{-1})^5 + o(x^6)$$

$$= (ax + bx^3 + cx^5) + \frac{2}{3}(ax^3 + abx^5) + \frac{4}{15}ax^5 + o(x^6)$$

$$f(f^{-1}(x)) = ax + (b + \frac{2}{3}a)x^3 + (c + \frac{2}{3}ab + \frac{4}{15}a)x^5 = x$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b + \frac{2}{3}a = 0 \\ c + ab + \frac{4}{15}a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = -\frac{6}{15} \end{cases}$$

$$\text{Donc } f^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{6}{15}x^5 + o(x^6)$$

Pour affirmer que  $f^{-1}$  admet un DL à l'ordre 6, il faut un argument. Par exemple ici, on devrait prouver (dans les consignes) que  $f^{-1}$  est  $\mathcal{C}^\infty$ ; c'est une condition suffisante.

Pour cela : thm de dérivation d'une réciproque,

$(f^{-1})$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\text{donc } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

classe  $\mathcal{C}^2$  puis par récurrence  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$   $\forall n \in \mathbb{N}$ .