

TD 20 : Analyse asymptotique

Calculs de développements limités

Ex 1 Calculer le développement limité de $\tan$ en 0 à l'ordre 5 par la méthode directe, puis par intégration et par dérivation. **Méthode indirecte : en faisant le DL de $\sin/\cos$ à l'ordre 5. Intégration et dérivation : vue en cours, utiliser $\tan' = 1 + \tan^2$**

Ex 2 Déterminer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre n et au voisinage de a :

$$(a) f_1(x) = \ln(2e^{-x} + e^x) \quad n = 4 \quad a = 0 \quad (b) f_2(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad n = 3 \quad a = 0$$

$$(c) f_3(x) = \operatorname{Arccos} x \quad n = 5 \quad a = 0 \quad (d) f_4(x) = \cos x \quad n = 5 \quad a = \frac{\pi}{3} \quad (a) \text{ On aura besoin du DL de } \ln \text{ en 3.}$$

$$(e) f_5(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x} \quad n = 3 \quad a = 0$$

On pourra écrire que $\ln(3+u) = \ln(3(1+\frac{u}{3})) = \ln(3) + \ln(1+\frac{u}{3})$ ce qui nous ramène à un DL de $\ln$ en 1.

(b) Utiliser $(1+x)^{1/x} = \exp(\frac{1}{x} \ln(1+x))$

(c) $\operatorname{Arccos}'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ dont on peut donner un DL à l'ordre 4, puis le primitiver.

(d) $\cos(\frac{\pi}{3} + h) = \cos(\frac{\pi}{3})\cos(h) - \sin(\frac{\pi}{3})\sin(h)$

(e)

Ex 3 Soit $f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2 \tan(x) - x$. Montrer que f admet une fonction réciproque impaire de classe $\mathcal{C}^\infty$, puis déterminer le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6.

Après avoir justifié que f est bijective, on utilise l'égalité $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ pour montrer que si $f^{-1} \in \mathcal{C}^n$ alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^{n+1}$

Ex 4 Donner un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la solution φ de l'équation différentielle :

$$2(x-1)y' + y = \sin(2x) + x^2 \quad \text{telle que} \quad y(0) = 1$$

(On montrera qu'une telle solution existe et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0).

Comme $y' = \frac{\sin(2x) + x^2 - y}{2(x-1)}$ si $y \in \mathcal{C}^n(]-1, 1[)$ alors $y \in \mathcal{C}^{n+1}(]-1, 1[)$ Ensuite: si $f \in \mathcal{C}^{+\infty}$ alors elle admet un DL à tout ordre en 0.

Comme f est impaire, f^{-1} également et donc $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_0(x^6)$ et on identifie les DL de $f(f^{-1}(x))$ et celui de x en 0.

Calculs de limites et d'équivalents

Ex 5 Déterminer des équivalents simples au point a pour les fonctions suivantes :

$$(a) g_1(x) = \ln(\sin x) \quad a = 0 \quad (b) g_2(x) = -\cotan(x) \sin^2(nx) \quad a = 0 \text{ avec } n > 0.$$

$$(c) g_3(x) = \frac{2 \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan}(2x)}{x^{\frac{3}{2}}} \quad a = 0 \quad (d) g_4(t) = \frac{\sin t}{t^a} \quad a = 0.$$

$$(e) g_5(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^3} \quad a = 0 \text{ et } a = +\infty \quad (f) g_6(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} - \frac{x}{3}$$

Ex 6 Calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x - \tan(2x)}{x(1 - \cos(3x))} \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi x + 1}{2x + 1} \right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh} x} \right)^x \quad (d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(3x)} \left(\operatorname{Arctan}(2 \sin x) - \frac{\pi}{4} \right) \quad a) \text{ Faire des DL à l'ordre 3 du numérateur}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{3x+1} \right) + \sin \left(\frac{\pi x}{6x+1} \right) \right)^x \quad (f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \right)^{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

teur ainsi que du dénominateur : cela permettra d'en trouver des équivalents en 0

b) Attention, on étudie Arctan mais non pas au voisinage de 0, mais de celui de $+\infty$. On utilisera alors la relation $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, et on pourra alors utiliser un DL en la variable $\frac{1}{x}$ qui elle, tend bien vers 0.

c) Exprimer sous la forme $\exp\left(x \left(\ln\left(\frac{eh(x)}{1+sh(x)}\right)\right)\right)$

Applications à l'étude de fonctions

Ex 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x}$.

Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 mais que $f''(0)$ n'existe pas.

Ecrire $x^3 \sin(\frac{1}{x})$ comme le produit de x^2 par une fonction qui tend vers 0 : $x \sin(\frac{1}{x})$ car fonction bornée multipliée par fonction qui tend vers 0

Ex 8

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.
Déterminer son développement limité en 0 à l'ordre n .

Attention : ce n'est pas un DL de l'exponentielle en 0 car $-\frac{1}{x^2} \rightarrow -\infty$ On montrera plutôt que pour tout n , $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} \rightarrow 0$ en faisant un changement de variable dans la limite en utilisant le TCC

2. Deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ont le même développement limité à tout ordre en 0 sont-elles égales?

Ex 9 Soit $f : x \mapsto \frac{x \sin(\pi x)}{\ln(x)}$ pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et préciser $f(1)$. Montrer que f ainsi prolongée est deux fois dérivable en 1.
2. Mêmes questions en 0.

Ex 10

1. A l'aide des développements asymptotiques en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, déterminer des courbes asymptotes à C_f et leurs positions par rapport à C_f .

$$f(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2}$$

2. Mêmes questions avec $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.

Ex 11 Soit $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f . En dehors du point $x = 0$, les arguments usuels fonctionnent. En 0 : cela revient à montrer que f admet un DL à l'ordre 1
2. Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}_f$ en l'infini. Étudier leurs positions relatives. Poser $h = \frac{1}{x}$, alors $1 + e^h$ admet un DL lorsque x tend vers l'infini (car h tend vers 0)
3. Étudier les variations de f puis tracer.

Étude asymptotique de suites

Ex 12 Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 des suites :

$$(a) u_n = \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{n+1}{n+3}} \quad (b) u_n = \ln \left(n \tan \frac{1}{n} \right) \quad (c) u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1} \sin(n)} \right)$$

a) Attention, le DL connu de la fonction arctangente est celui en 0, ici, il faudra celui en 1. On peut utiliser le fait que $\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ puis le primitiver

b) Poser $h = \frac{1}{n}$, utiliser un DL en 0 de tangente c) Poser $h = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1} \sin(n)}$, qui est lui même de la forme $\frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1-u}$

Ex 13

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$ que l'on notera u_n . Appliquer le TVI
2. Étudier la convergence de (u_n) et montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. On applique le TVI à la fonction f_n sur $[\ln(n) - 1, \ln(n) + 1]$ pour montrer qu'à partir d'un certain rang $\ln(n) - 1 \leq u_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a \ln(n) + b \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

On écrit $u_n = \ln(n) + v_n$ où l'on sait que $v_n = O_{+\infty}(1)$.