

Dimension et variables aléatoires

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Théorème noyau/image et Théorème du rang

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev avec E de dimension finie et f est une application linéaire de E dans F .

- Si E' un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E , alors $f|_{E'}$ est un isomorphisme de E' dans $\text{Im}(f)$.
- Soient E et F deux \mathbb{K} -ev avec E de dimension finie. Si f est une application linéaire de E dans F alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$$

Proposition 2 Équivalences de trois propositions

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev de dimension finie et f une application linéaire de E dans F .

Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. f est bijective de E dans F .
2. f est injective sur E .
3. f est surjective de E dans F .

Proposition 3 Invariance du rang par composition d'isomorphismes

Soient E, F et G \mathbb{K} -ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Si f est un isomorphisme, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.

Si g est un isomorphisme, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

Proposition 4 Caractérisation géométrique des hyperplans

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie. On a équivalence entre

1. H est un hyperplan de E .
2. Il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = D \oplus H$.
3. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 5 Noyau commun pour deux formes linéaires

Deux hyperplans d'un \mathbb{K} -ev de dimension finie sont égaux ssi leurs équations cartésiennes sont proportionnelles.

Proposition 6 Existence d'une loi de probabilités

$(x_k, p_k)_{1 \leq k \leq n}$ caractérise la loi de probabilité d'une variable aléatoire ssi

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_k \geq 0 \\ \sum_{k=1}^n p_k = 1 \end{cases}$$

Proposition 7 Loi de probabilités de $Y = f(X)$

La loi de $Y = f(X)$ est $P_Y : \begin{cases} Y(\Omega) \rightarrow [0, 1] \\ y \mapsto P(Y = y) \end{cases}$ avec

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega) | y=f(x)} P(X = x) = \sum_{k | y=f(x_k)} p_k$$

Proposition 8 Propriétés

Soient X et Y deux v.a.r. définies sur Ω .

- $\forall a \in \mathbb{R}, E(a) = a$.
- **Linéarité** : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.
- **Positivité** : Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$.
- **Croissance** : Si $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$.

Proposition 9 Formule de König-Huygens et variance de $aX + b$

Soit X une v.a.r. définie sur Ω . Alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Proposition 10 Formule de transfert

Soit X une v.a.r. définie sur Ω et $f : X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)P(X = x_i)$$

Proposition 11 Inégalité de Markov

Soit X une v.a.r. telle que $X \geq 0$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E(X)$$

Proposition 12 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. définie sur Ω alors

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} V(X)$$

Proposition 13 Conséquence de l'indépendance mutuelle

Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** (définition qu'on rappellera) sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ alors pour tout $A_1 \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)), \dots, A_n \in \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, on a

$$P((X_1 \in A_1) \cap \dots \cap (X_n \in A_n)) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

Proposition 14 Espérance d'une fonction composée avec un couple aléatoire

Soient X et Y deux v.a.r. sur Ω et g une application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans \mathbb{R} alors

$$E(g(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} g(x, y) P((X = x) \cap (Y = y))$$

À savoir faire

- Tous les exercices du chapitre "dimension finie"
- Les lois usuelles n'ont pas encore été vues en cours
- Trouver la loi d'une variable aléatoire réelle dont l'univers image est fini : on détermine dans un premier temps son univers image, puis pour chacune des valeurs x_k potentiellement prises par la v.a.r, on détermine $P(X = x_k)$: parfois en utilisant la formule des probabilités composées, parfois en utilisant l'équiprobabilité d'une situation
- Calculer une espérance d'une v.a.r X (avec $X(\Omega)$ fini) dont on connaît la loi, calculer sa variance (aucune loi usuelle n'est à connaître pour l'instant)
- Trouver la loi d'une marginale lorsqu'on connaît la loi d'un couple aléatoire

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

d) Loi d'une variable aléatoire

Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E .

Variable aléatoire $f(X)$.

~~Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E .~~

~~Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.~~

~~Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.~~

Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A .

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$.

On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.

Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$.

~~Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. — Interprétation comme succès d'une expérience.~~

Notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.

Notation $P(X = x, Y = y)$.

Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

e) Événements indépendants - déjà vu dans un chapitre précédent**f) Variables aléatoires indépendantes**

Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$.

CONTENUS

Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Lemme des coalitions : si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes.

Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

CONTENUS

a) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Espérance $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$ d'une variable aléatoire X .

Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.

Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.

Formule de transfert : $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$.

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

L'espérance est un indicateur de position.

Formule $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.

Variable aléatoire centrée.

Exemple : $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n -uplets.

Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.

b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.

Relation $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.

Covariance de deux variables aléatoires.

Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes.

Variance d'une somme, cas de variables décorréliées.

Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.

Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorréliées.

On retrouve la variance d'une variable binomiale.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

c) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Application à l'obtention d'inégalités de concentration.

Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.