

Dimension

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Symétrie

Étant donnée la somme directe $E = F \oplus G$, on appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application s définie par :

$$s : \begin{cases} E = F \oplus G & \rightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G & \mapsto & \vec{x}_F - \vec{x}_G \end{cases}$$

Connaître l'équivalence des propositions suivantes, on demandera uniquement les démonstrations de $(a) \Rightarrow (b)$ et $(b) \Rightarrow (c)$ mais pas de $(c) \Rightarrow (a)$. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

1. s est une symétrie
2. $s^2 = \text{Id}_E$
3. $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ est un projecteur qui est appelé projecteur associé à s .

s est donc la symétrie par rapport à $F = \text{Im}(p) = \ker(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $G = \ker(p) = \ker(s + \text{Id}_E)$.

Proposition 2 Sous-famille et sur-famille

Soit X et Y deux familles non vides d'un \mathbb{K} -ev E .

Si $X \subset Y$ et Y libre dans E alors X est libre dans E .

Si $X \subset Y$ et X liée dans E alors Y est liée dans E .

Proposition 3 Coordonnées dans une base

Si $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une base de E alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de la famille $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ soit

$$\forall \vec{x} \in E, \exists J \text{ finie } \subset I, \exists (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J, \vec{x} = \sum_{j \in J} \lambda_j \vec{e}_j$$

De plus, cette décomposition est unique.

Proposition 4 Base adaptée à une somme directe

Soient F et G deux sev de E .

Si F et G sont en somme directe et \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont respectivement des bases de F et G alors la concaténation de \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 est une base de $F \oplus G$.

Une telle base est appelée **base adaptée** à la somme directe $F \oplus G$.

On en déduit $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

Définition 1 Bases canoniques (il faudra justifier que ce sont bien des bases des espaces en question)

- \mathbb{K}^n a pour base canonique $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ où $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.
- $\mathbb{K}[X]$ a pour base canonique $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}_n[X]$ a pour base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a pour base canonique les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition 5 Lemme (Seulement pour les volontaires)

Si $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille génératrice de E alors toute famille de $p + 1$ vecteurs est liée.

Proposition 6 Principe du théorème de la base incomplète

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une famille libre. Si $\vec{x} \notin \text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ alors $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{x})$ est libre.

Proposition 7 Théorème de la base incomplète/ base extraite (On peut utiliser la prop. 6 sans la redémontrer)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie alors

- Toute famille libre de E peut être complétée en base de E
- De toute famille génératrice de E , on peut extraire une base de E

Définition 2 Dimension d'un espace vectoriel

Si E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie, alors

1. E admet une base finie
2. toutes les bases de E admettent le même nombre d'éléments. Ce dernier est appelé **dimension** de E et noté $\dim(E)$ ou s'il y a ambiguïté $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.
On pose $\dim(\{\vec{0}_E\}) = 0$.

Proposition 8 Familles libres - Familles génératrices

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et $(\vec{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$ des vecteurs de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(\vec{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E .
2. $(\vec{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de E .
3. $(\vec{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille génératrice de E .

Proposition 9 Dimension d'un produit cartésien et d'une somme directe

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev de dimension finie, alors $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Soient F et G deux sous-ev de E en somme directe alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

Énoncer les deux résultats et en démontrer un, au choix de l'interrogateur

Proposition 10 Formule de Grassmann

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, F et G deux sev de E . Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Proposition 11 Détermination par l'image d'une base

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $(\vec{y}_i)_{1 \leq i \leq n} \in F^n$ alors il existe une unique application linéaire f de E dans F qui vérifie

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$$

Proposition 12 Caractérisation de la notion "être isomorphes"

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev de dimension finie.

E et F sont isomorphes ssi $\dim(E) = \dim(F)$.

À savoir faire

- Utiliser la formule de Grassman
- Exprimer un sous-ev de \mathbb{R}^n donné à l'aide d'équations, sous forme d'espaces engendré par une famille de vecteurs. En déduire la dimension d'un tel sous-espace (on appliquera la méthode du pivot de Gauss pour se ramener à un système échelonné, s'il y a plus d'inconnues que d'équations, certaines peuvent "être passées en paramètres")
- Montrer qu'une famille de vecteurs est liée, ou libre
- Montrer qu'une famille est génératrice
- Montrer qu'une famille est une base, s'en servir pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel
- Savoir montrer qu'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence (\mathbb{K}^n , $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, E), \dots$)
- Reconnaître un sous-espace affine d'un espace vectoriel et donner sa direction (exemple : ensemble des solutions d'un système linéaire, ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire)
- Savoir montrer qu'une fonction donnée est une application linéaire.
- Déterminer le noyau/ l'image d'une application linéaire. En déduire si elle est injective/ surjective.
- Reconnaître un projecteur : on calcule $f \circ f$ (et vérifier que cela vaut f) f est alors le projecteur sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$. Idem avec les symétries : calculer $f \circ f$ (et vérifier que cela vaut Id) et $\ker(f - \text{Id})$ ainsi que $\ker(f + \text{Id})$

Ce qu'en dit le programme

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Applications linéaires : a) Généralités

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im}u = \text{vect}(u(x_i))_{i \in I}$.

Application linéaire de rang fini.

Notation $\text{rg}(u)$.

Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

c) Détermination d'une application linéaire

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u .

Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.

Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie.

Si E_1, \dots, E_p sont des sous-espaces de E tels que

$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i , alors il existe

une unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_i} = u_i$ pour tout i .