

Espaces vectoriels

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Espace engendré par une famille de vecteurs

Soit E un \mathbb{K} -ev et $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E , alors le sous-espace vectoriel de E engendré par X est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X , c'est-à-dire

$$\text{vect}(X) = \text{vect}(x_i)_{i \in I} = \left\{ \sum_{i \in J} \lambda_i \cdot x_i \mid (\lambda_i)_{i \in J} \text{ famille finie de scalaires} \right\}$$

Proposition 2 Propriétés

Soit E un \mathbb{K} -ev, X et Y des parties de E .

• **Inclusion** : $X \subset Y \implies \text{vect}(X) \subset \text{vect}(Y)$

• **Enlever un vecteur** :

Si $x \in X$ est combinaison linéaire des vecteurs de $X \setminus \{x\}$ alors $\text{vect}(X) = \text{vect}(X \setminus \{x\})$

Proposition 3

Soit I un ensemble non vide.

Si $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous- \mathbb{K} -espace vectoriels de E alors $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de E .

Proposition 4 Union de deux sev

Soient F et G deux sous- \mathbb{K} -espaces vectoriels de E .

$F \cup G$ est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$

Proposition 5 Union et somme

Si F et G sont deux sous-espace vectoriel de E alors $F + G = \text{vect}(F \cup G)$

Proposition 6 Caractérisation de la somme directe

F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$

Proposition 7 Caractérisation

Soient $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous- \mathbb{K} -espaces vectoriels de E .

F_1, \dots, F_p sont en somme directe ssi

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p F_i, \quad \sum_{i=1}^p x_i = 0_E \implies x_1 = \dots = x_p = 0_E$$

Proposition 8 Théorème

L'ensemble des translations de E noté $\mathcal{T}(E)$ est un groupe abélien pour la composition.

Proposition 9 Sous-espaces affines

- $M \in \mathcal{F} = \Omega + F$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M} \in F$
- Soit \mathcal{F} le sous-espace affine passant par Ω et dirigé par F .
Alors pour tout point $A \in \mathcal{F}$, on a $\mathcal{F} = A + F$.
- Soit \mathcal{F} le sous-espace affine passant par Ω et de direction F .
Alors pour tout point $A \in \mathcal{F}$, on a $F = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{F}\}$.
 F est donc unique et est appelé **la direction** de \mathcal{F} .

Proposition 10 Images directes et réciproques

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E' un sev de E et F' un sev de F .
Alors $f(E')$ est un sev de F et $f^{-1}(F')$ est un sev de E .

Proposition 11 Caractérisation de l'injectivité et la surjectivité

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 f est injective sur E si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
 f est surjective de E dans F si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Proposition 12 Projecteur

Étant donnée la somme directe $E = F \oplus G$, on appelle **projecteur** (ou projection linéaire) sur F parallèlement à G l'application p définie par :

$$p : \begin{cases} E = F \oplus G & \rightarrow E \\ x = x_F + x_G & \mapsto x_F \end{cases}$$

Ce projecteur vérifie alors

- $p \in \mathcal{L}(E)$
- $p \circ p = p$
- $\vec{x} \in \text{Im}(p) \Leftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{x}$

À savoir faire

- Savoir montrer qu'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence (\mathbb{K}^n , $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$, ...)
- Reconnaître un sous-espace affine d'un espace vectoriel et donner sa direction (exemple : ensemble des solutions d'un système linéaire, ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire)
- Savoir montrer qu'une fonction donnée est une application linéaire.
- Déterminer le noyau/ l'image d'une application linéaire. En déduire si elle est injective/ surjective.
- Reconnaître un projecteur : on calcule $f \circ f$ (et vérifier que cela vaut f) f est alors le projecteur sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.

Ce qu'en dit le programme

Espaces vectoriels et applications linéaires

A - Espaces vectoriels

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Applications linéaires : a) Généralités

Application linéaire.

Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.

Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F .

Bilinéarité de la composition.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.

Image d'une application linéaire.

Noyau d'une application linéaire.

Caractérisation de l'injectivité.

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.

Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

Notations id_E , id .

Non commutativité si $\dim E \geq 2$.

Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$.

Automorphismes. Groupe linéaire.

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Notation $\text{GL}(E)$.

Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .