

Colle 24 : Analyse asymptotique - Espaces vectoriels

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 DL

Connaître le DL de $(1+x)^\alpha$, à un ordre quelconque en 0, avec justification.

Proposition 2 DL

À partir du DL de $(1+x)^\alpha$ pour des valeurs de α bien choisies, retrouver ceux de $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$ et $\text{Arctan}(x)$ et $\text{Arcsin}(x)$ (jusqu'à l'ordre 5 pour ce dernier)

Proposition 3 DL de la fonction tangente

Retrouver le DL en 0 à l'ordre 7 de tangente en utilisant l'égalité $\tan' = 1 + \tan^2$ à plusieurs reprises.

Exercice 1 Prolongation par continuité - Tangente et position

Soit $f : x \mapsto \frac{2x \ln x}{x-1}$ en $x = 1$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1
2. Montrer que la fonction ainsi prolongée est dérivable en 1
3. Préciser l'équation de la tangente en 1 et la position du graphe de 1 par rapport à cette tangente.

Proposition 4 Position par rapport à la tangente

Si l'on a le DL suivant

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^p)$$

(où $a_p \neq 0$) alors la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 est d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ et la position du graphe par rapport à cette tangente est déterminée par la parité de p et le signe de a_p , on représentera les 4 situations possibles sans démonstration

Exercice 2 Trouver une limite à l'aide de DL

Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2 \sin x - 4x}{x(e^x + e^{-x} + 2 \cos x - 4)}$.

Exercice 3 Étude des branches infinies

Étudier toutes les branches infinies de $g : x \mapsto \ln(1+x^2) - \frac{1}{x}$. (On précisera la position par rapport aux asymptotes s'il y en a)

Proposition 5 Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Soient E un \mathbb{K} -ev [ce dont on rappellera la définition](#)) et F un ensemble.

F est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de E si :

SEV1 $F \subset E$

SEV2 $F \neq \emptyset$

SEV3 $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$: Stabilité par combinaison linéaire

Exercice 4 Sous-espaces vectoriels à connaître (on demandera d'en prouver 2 au choix de l'interrogateur)

- L'ensemble des suites convergentes est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
- L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$
- $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- L'ensemble des matrices symétriques est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition 6 Intersections de sous-espaces vectoriels

Soit I un ensemble non vide.

Si $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous- \mathbb{K} -espace vectoriels de E alors $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de E .

Proposition 7 Union de sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous- \mathbb{K} -espaces vectoriels de E .

$F \cup G$ est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$

À savoir faire

- Additionner des DL (si un terme $o_{x_0}((x - x_0)^n)$ apparaît, il est inutile de calculer les termes $o_{x_0}((x - x_0)^k)$ pour $k > n$.)
- Faire des produits de DL
- Diviser des DL : ramener le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ à un produit $h(x) \frac{1}{1+u(x)}$ où $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
- Composer des DL : pour l'exponentielle, $e^{a_0+u(x)} = e^{a_0} e^{u(x)}$ pour se ramener à un DL en 0.
Pour le logarithme, $\ln(a_0 + u(x)) = \ln(a_0(1 + \frac{u(x)}{a_0})) = \ln(a_0) + \ln(1 + \frac{u(x)}{a_0})$ pour se ramener à un DL en 1.
- Utiliser des DL : pour trouver un équivalent, une limite, trouver une asymptote,
- Dire si un certain ensemble (muni d'une lci + et d'une lce . .) est (ou n'est pas) un \mathbb{K} -espace vectoriel. On cherchera à montrer que c'est un sous- \mathbb{K} -ev d'un \mathbb{K} -ev de référence

Ce qu'en dit le programme

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire;
- reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire;
- définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires;
- présenter quelques notions de géométrie affine, afin d'interpréter géométriquement certaines situations.

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général ; on en tirera parti par de nombreuses figures.

Le corps \mathbb{K} est égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.

A - Espaces vectoriels

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espaces vectoriels

Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

Espaces \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Produit d'un nombre fini de \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.

Espace \mathbb{K}^Ω , cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.

On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

b) Sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.

Sous-espace nul. Droite vectorielle.

Plan vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.

Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.

Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

Sous-espace vectoriel engendré par une partie A .

Notations $\text{vect}(A)$, $\text{vect}(x_i)_{i \in I}$.

Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\text{vect}(A)$.

c) Familles de vecteurs : Pas pour le moment