

DS n°8.**Durée : 2 heures : 7h30 - 9h30**

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.

Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroté vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Questions indépendantes

1. L'ensemble E_1 des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, est-il un sous espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$? (Justifier)
2. L'ensemble E_2 des matrices $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle, est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? (Justifier)
3. Déterminer la limite en 0 de $\frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos(3x)}$
4. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z)$.
 - (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
 - (b) Montrer que f est un projecteur
 - (c) On admet que f est un projecteur sur un plan $\mathcal{P}$ parallèlement à une droite $\mathcal{D}$. Trouver un vecteur non-nul de cette droite

Exercice 1 : Développement limité d'une fonction réciproque

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x \exp(x^2)$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
3. Prouver que pour tout entier n , f^{-1} est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$
4. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 (Citer le résultat utilisé).
5. Donner ce développement limité.

Exercice 2 : Ensembles de polynômes

Soit A un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note

$$A\mathbb{K}[X] = \{AP, P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

1. Vérifier que $A\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
2. On note $n = \deg(A)$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X] \oplus A\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]$.

Problème

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$, où on a posé $g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - \frac{7}{2}$.

1. Étudier les variations de la fonction g , en déduire celles de f .
2. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)$, et donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1+u)^{\frac{1}{3}}$.
4. En effectuant un développement asymptotique de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, prouver que le graphe de f admet une asymptote oblique et préciser la position du graphe par rapport à cette asymptote.
5. Sans effectuer de calcul supplémentaire, déterminer le comportement de f en $-\infty$.
6. Tracer une allure la plus précise possible de la courbe de f . On donne la valeur $\sqrt[3]{2} \simeq \frac{5}{4}$.
7. Expliquer pourquoi l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution lorsque $n \in \mathbb{N}^*$. On note u_n cette solution.
8. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
9. Calculer le deuxième terme du développement asymptotique de u_n .