

Correction du DS n°8.**Durée : 2 heures : 7h30 - 9h30****Questions indépendantes**

1. L'ensemble E_1 des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, ne contient pas la fonction nulle, donc ce n'est pas un sous-ev de $C^1(\mathbb{R})$
2. L'ensemble E_2 des matrices $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle vérifie

- $E_2 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- $Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E_2$
- Soit $(A, B) \in E_2^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $Tr(A) = Tr(B) = 0$ et on sait que $Tr(\lambda A + B) = \lambda Tr(A) + Tr(B) = 0$ donc $\lambda A + B \in E_2$: E_2 est donc stable par combinaisons linéaires

3. Le dénominateur $1 - \cos(3x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{9x^2}{2}$, chercons un équivalent du numérateur, en faisant un DL à l'ordre 2 en 0
 $1 + \ln(1+x) - e^x = 1 + x - \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) = -x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ donc $1 + \ln(1+x) - e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2$. Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(3x)} = \frac{-1}{\frac{9}{2}} = -\frac{2}{9}$$

4. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z)$.
 - (a) Soit $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda \vec{u} + \vec{v} = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ et l'on a $f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = (2\lambda x + 2x' - 2\lambda z - 2z', \lambda y + y', \lambda x + x' - \lambda z - z') = \lambda(2x - 2z, y, x - z) + (2x' - 2z', y', x' - z') = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
 donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$
 - (b) On détermine $f \circ f$. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors
 $f(f(\vec{u})) = (2(2x - 2z) - 2(x - z), y, (2x - 2z) - (x - z)) = (2x - 2z, y, x - z) = f(\vec{u})$. On a donc $f \circ f = f$ ainsi f est un projecteur (sur $Im(f)$ parallèlement à $\ker(f)$)
 - (c) Déterminons $\ker(f)$:

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{on remarque que la première et la troisième ligne sont}$$

$$\text{équivalentes donc } (x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Ainsi } \ker(f) = \{(x, 0, x), x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 0, 1)). \text{ Le vecteur } (1, 0, 1) \text{ est un vecteur directeur de la droite cherchée.}$$

Exercice 1 : Développement limité d'une fonction réciproque

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x \exp(x^2)$.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = (2x^2 + 1) \exp(x^2) > 0$.
 En particulier, f est strictement croissante. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Puisque f est de plus continue et $\mathbb{R}$ est un intervalle, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. (théorème de la bijection)
2. f' ne s'annulant pas, on en déduit que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de dérivation d'une fonction réciproque. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

3. On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété " f^{-1} est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ". D'après la question précédente, l'initialisation est prouvée pour $n = 1$.
Si f^{-1} est n fois dérivable, alors comme $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, le dénominateur étant la composée d'une fonction n fois dérivable qui ne s'annule pas avec une autre fonction n fois dérivable, on obtient que $(f^{-1})'$ est n fois dérivable i.e. que f^{-1} est $n + 1$ fois dérivable : ceci prouve l'hérédité.
4. Comme f est 5 fois dérivable, on obtient que $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ et d'après la formule de Taylor Young, f admet un DL en 0 à l'ordre 4
5. On remarque d'abord que $f^{-1}(0) = 0$. Écrivons le DL de f^{-1} en 0 sous la forme $f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + o(y^4)$.
On a de plus $f(x) = x + x^3 + o(x^4)$.
Posons $y = x + x^3 + o(x^4)$. On a alors

$$\begin{aligned} y &= x + x^3 + o(x^4) \\ y^2 &= x^2 + 2x^4 + o(x^4) \\ y^3 &= x^3 + o(x^4) \\ y^4 &= x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Il vient $f^{-1}(f(x)) = ax + bx^2 + (a + c)x^3 + (2b + d)x^4 + o(x^4)$.

Mais, $f^{-1}(f(x)) = x = x + o(x^4)$.

Par unicité des développements limités, on en déduit que $a = 1$, $b = 0$, $a + c = 0$ et $2b + d = 0$. On obtient finalement le DL suivant pour la fonction f^{-1} : $f^{-1}(y) = y - y^3 + o(y^4)$.

On aurait pu, pour simplifier un tout petit peu les calculs, remarquer que la fonction f^{-1} , tout comme la fonction f , est impaire, et donc que les coefficients d'ordre pair du DL sont nuls.

Exercice 2 : Ensembles de polynômes

1.
 - $A\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}[X]$
 - On a $0_{\mathbb{K}[X]} = A \times 0_{\mathbb{K}}[X]$ donc $0_{\mathbb{K}[X]} \in A\mathbb{K}[X]$
 - Soit P et Q deux polynômes de $A\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\exists (\tilde{P}, \tilde{Q}) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = A\tilde{P}$ et $Q = A\tilde{Q}$. On a donc

$$\lambda P + Q = A \times (\lambda \tilde{P} + \tilde{Q}) \in A\mathbb{K}[X]$$

donc $A\mathbb{K}[X]$ est un sous- $\mathbb{K}$ espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe (un unique) couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P = AQ + R$. On a bien $AQ \in A\mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ d'où $P \in A\mathbb{K}[X] + \mathbb{K}_{n-1}[X]$ ce qui prouve $\mathbb{K}[X] \subset A\mathbb{K}[X] + \mathbb{K}_{n-1}[X]$. L'inclusion réciproque est immédiate donc il y a en fait égalité.

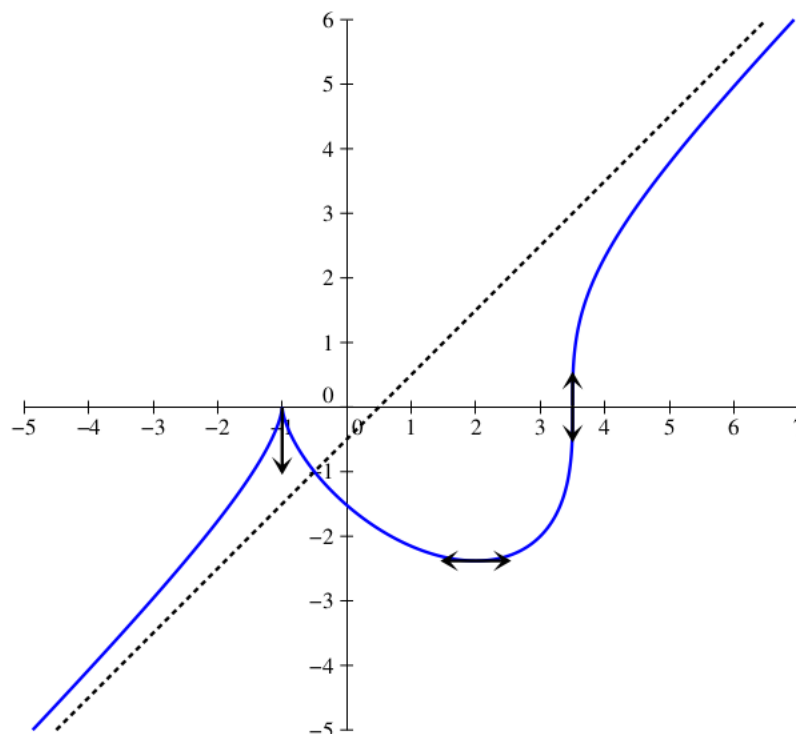
Montrons que la somme est directe (en fait, l'unicité du couple (Q, R) garantit cela, mais on donne malgré tout la preuve utilisant l'intersection). Soit $P \in A\mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_{n-1}[X]$, alors il existe $\tilde{P} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = A\tilde{P}$. De plus $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ donc $\deg(P) \leq n - 1$ i.e. $\deg(A) + \deg(\tilde{P}) \leq n - 1$ i.e. $n + \deg(\tilde{P}) \leq n - 1$ ainsi $\deg(\tilde{P}) < 0$. Seul le polynôme nul vérifie cela (degré égal à $-\infty$) donc on a $\tilde{P} = 0_{\mathbb{K}}[X]$ puis $P = 0_{\mathbb{K}}[X]$ ce qui prouve $A\mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \{0_{\mathbb{K}}[X]\}$, l'inclusion réciproque étant immédiate on a finalement $A\mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_{n-1}[X] = \{0_{\mathbb{K}}[X]\}$ donc la somme est directe.

Problème

1. La fonction g est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = 3x^2 - 2x - 6 = 3(x^2 - x - 2)$. Ce trinôme a pour racines évidentes -1 et 2 (oui on peut calculer un discriminant si on y tient vraiment). On obtient donc le tableau de variations suivant pour la fonction g , auquel on colle celui de f qui sera le même puisque la fonction racine cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (la seule subtilité étant que f ne sera pas dérivable sur $\mathbb{R}$, on reviendra dessus au moment de tracer la courbe). Précisons en passant les valeurs intéressantes : $g(-1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 - \frac{7}{2} = 0$ (donc $f(-1) = 0$ également), et $g(2) = 8 - 6 - 12 - \frac{7}{2} = -\frac{27}{2}$, donc $f(2) = -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$. Le calcul des limites ne pose aucun problème.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{27}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Comme on l'a déjà signalé dans le tableau de variations, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$, et on a le droit de composer des équivalents par des puissances, donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.
3. C'est du cours: $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} - 1\right) u^2 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} - 1\right) \times \left(\frac{1}{3} - 2\right) u^3 + o(u^3) = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + \frac{5}{81}u^3 + o(u^3)$.
4. On commence par écrire $f(x) = \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2} - \frac{7}{2x^3}\right)} = x \sqrt[3]{1 - \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2} - \frac{7}{2x^3}}$. On peut effectuer le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ (avec X qui aura une limite nulle quand x tend vers $+\infty$) puis appliquer le développement limité rappelé à la question précédente, mais en se contentant de l'ordre 2: $f(x) = \frac{1}{X} \left(1 - \frac{3}{2}X - 6X^2 + o(X^2)\right)^{\frac{1}{3}}$
 $= \frac{1}{X} \left(1 - \frac{1}{2}X - 2X^2 - \frac{1}{4}X^2 + o(X^2)\right) = \frac{1}{X} - \frac{1}{2} - \frac{9}{4}X + o(X)$. Autrement dit, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x - \frac{1}{2} - \frac{9}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. En particulier, $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{9}{4x}$, ce qui permet d'une part d'affirmer que la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ (puisque l'équivalent a une limite nulle), et d'autre part que la courbe sera au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ (équivalent négatif).
5. Tout le calcul effectué ci-dessus (y compris la factorisation $\sqrt[3]{x^3}$ sous la forme x) reste valable en $-\infty$. La même droite reste donc asymptote oblique de l'autre côté, mais cette fois-ci la courbe sera localement au-dessus de son asymptote puisque $-\frac{9}{4x}$ est positif au voisinage de $-\infty$.
6. Avec la valeur donnée par l'énoncé, le minimum de f est environ égal à $-\frac{12}{5} = -2.4$. Les calculs effectués aux deux questions précédentes permettent évidemment de faire figurer l'asymptote sur notre graphique, mais il y a un détail à ne pas oublier si on veut une courbe correcte: la fonction racine cubique n'est pas dérivable en 0 (comme la racine carrée), ce qui fait que f ne sera notamment pas dérivable en -1 (il n'y a donc absolument pas de tangente horizontale au maximum local atteint en cette valeur, mais bel et bien une tangente verticale!). Au vu des variations de g , il y a une autre valeur d'annulation où la courbe de f admettra une tangente verticale. On peut la calculer en factorisant g par $(x+1)$, et même par $(x+1)^2$ puisque -1 est à la fois racine de g et de g' d'après les calculs effectués à la première question. Comme le produit des trois racines de g (en comptant deux fois la racine double -1) doit être égal à $\frac{7}{2}$ (relations coefficients-racines), on déduit sans réel calcul que $g(x) = (x+1)^2 \left(x - \frac{7}{2}\right)$, et donc que $f\left(\frac{7}{2}\right) = 0$, avec une tangente verticale à la courbe en ce point. La courbe de f donne donc l'allure assez spéciale qui suit :



7. L'équation ne peut avoir de solution sur l'intervalle $]-\infty, -2[$ où la fonction g est négative. Ensuite, g est continue et monotone sur $[2, +\infty[$, donc bijective de cet intervalle vers $]-\frac{27}{2}, +\infty[$, ce qui assure qu'elle y prend exactement une fois chaque valeur entière non nulle.
8. En notant h la réciproque de g (restreinte à l'intervalle donné dans la question précédente), on aura donc $u_n = h(n)$. Or, h a les mêmes variations que g , et vérifie en particulier $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. On en déduit que $\lim u_n = +\infty$. On peut alors affirmer que $g(u_n) = u_n^3 - \frac{3}{2}u_n^2 - 6u_n - \frac{7}{2} \sim u_n^3$. Comme par ailleurs $g(u_n) = n$, on a donc $u_n^3 \sim n$, puis $u_n \sim n^{\frac{1}{3}}$.
9. On sait que $u_n^3 - \frac{3}{2}u_n^2 - 6u_n - \frac{7}{2} = n$, donc $u_n^3 \left(1 - \frac{3}{2u_n} - \frac{6}{u_n^2} - \frac{7}{2u_n^3}\right) = n$, ou encore $\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}} = \left(1 - \frac{3}{2u_n} - \frac{6}{u_n^2} - \frac{7}{2u_n^3}\right)^{-\frac{1}{3}}$. Avec l'équivalent déjà obtenu à la question précédente, on peut écrire le membre de droite de cette égalité sous la forme $\left(1 - \frac{3}{2}n^{-\frac{1}{3}} + o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)\right)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{2}n^{-\frac{1}{3}} + o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$ (même si on avait gardé les termes suivants à l'étape précédente, on n'aurait pas eu de quoi pousser le développement limité plus loin, il faudrait refaire les calculs pour obtenir quelque chose de plus précis). On peut donc conclure : $u_n = n^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} + o(1)$.