

Exo 3: $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1) $A = \{f \in F \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$

sev 1) $A \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc $A \subset F$

sev 2) On sait ~~qu'il existe~~ ^{que pour tout} un $x \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = 0 \Rightarrow \tilde{0} \in A$. ✓

sev 3) Si $(f, g) \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

donc $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$

pour $\lambda f + g$
 ≥ 0

$\in \mathbb{R}$ donc peut être ≤ 0

donc A n'est pas stable ✓

2) $B = \{f \in F \mid f \text{ est dérivable et } f'(1) = 0\}$

sev 1) $B \subset F$

sev 2) On sait que $f'(1) = 0$ donc f est continue en 0

sev 3) Soient $(f, g) \in B$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

donc $f'(1) = 0$
 et $g'(1) = 0$

et $\lambda f'(1) + g'(1) = 0$ donc B est stable ✓

Donc B est bien un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de F .

3) $C = \{f \in F \mid f(0) = 1\}$

sev 1) $C \subset F$ ✓

sev 2) $C \neq \emptyset$ Mais $\tilde{0} \notin C$ et donc C ne peut pas être un sev.

sev 3) Soient $(f, g) \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

donc $f(0) = 1$

et $g(0) = 1$

on a $\lambda f + g = \lambda + 1 \neq 1$ ^{en général} donc C n'est pas stable ✓

5) $E = \{f \in F \mid f \text{ est continue et } \int_{-1}^1 f(x) dx = 0\}$

sev 1) $E \subset F$

sev 2) ~~$\exists x \in E$ tel que~~ $\int_{-1}^1 \tilde{0}(x) dx = 0$ donc $\tilde{0}_E \in E$

sev 3) Soit f et g deux ~~fonctions~~ ^{continues} linéaires $\in E$ et $\exists \lambda \in E$ tel que ~~alors~~

$\lambda \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 g(x) dx = 0$ donc E est stable

donc E est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de F .

4) D_1 : injective
 D_2 : surjective } de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

sev 1) $D_1 \subset F$
 et $D_2 \subset F$

sev 2) D_1 est injective donc strictement monotone donc $\tilde{0} \notin D_1$

$\tilde{0}$ n'étant ni injective
 ni surjective, ce ne sont pas
 des sev (ni D_1 ni D_2)

* $\int_{-1}^1 (\lambda f + g)(x) dx =$