

exercice 1 - TD 21

MINATCHY Charlotte
RAJOL Mathieu
SELEMAN Imane

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$

SEV1: Par définition $A \subset \mathbb{R}^2$ ✓

SEV2: Soit $(0, 0)$ on a: $0 \times 0 = 0 \geq 0$ donc $A \neq \emptyset$ ✓

SEV3: Soient $u = (1, 0)$ et $v = (0, -1)$ tous deux appartenant à A ✓

mais $u + v = (1, -1)$ et $1 \times (-1) < 0$ donc n'est pas stable par somme

donc A n'est pas un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{R}^2$ ✓

2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

Soit $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, $0 + 0 \neq 1$ donc B n'est pas un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{R}^2$ ✓

3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$

SEV1: Par définition $C \subset \mathbb{R}^2$ ✓

SEV2: Soit $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$ donc $C \neq \emptyset$ ✓

SEV3: Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda x_1, \lambda y_1) + (x_2, y_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$$

$$\text{et } 2(\lambda x_1 + x_2) + 3(\lambda y_1 + y_2) = 2\lambda x_1 + 3\lambda y_1 + \underbrace{2x_2 + 3y_2}_{=0}$$

$$= \lambda(2x_1 + 3y_1) \quad \text{donc } \lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in C.$$

donc C est un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{R}^2$ ✓

4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 = 0\}$

SEV1: Par déf. $D \subset \mathbb{R}^2$ ✓

SEV2: Soit $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ on a: $0^2 - 2 \times 0 + 0^2 = 0$ donc $D \neq \emptyset$ ✓

SEV3: Soit $u = (1, 1)$ et $v = (2, 0)$

$$\text{On a } u \in D \text{ car: } 1^2 - 2 \times 1 + 1^2 = 0 \quad \checkmark$$

$$v \in D \text{ car: } 2^2 - 2 \times 2 + 0^2 = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Mais } u + v = (3, 1) \text{ on a: } 3^2 - 3 \times 2 + 1^2 = 4 \neq 0 \notin D$$

donc n'est pas stable par l'addition ✓

donc D n'est pas un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{R}^2$

5. $E = \{re^{i\theta} \mid r \in \mathbb{R}^+, \theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]\}$

SEV1: Par définition $E \subset \mathbb{R}$ ✓

SEV2: Avec $r=0$, $\vec{0} \in E$ donc $E \neq \emptyset$

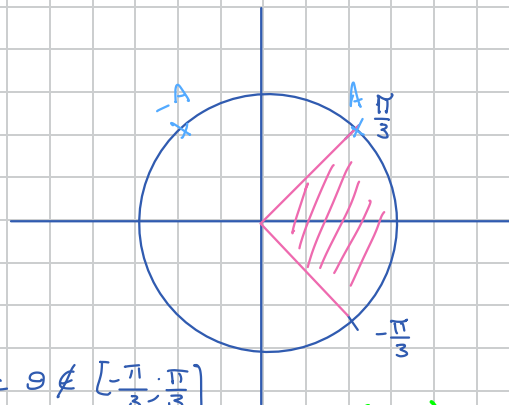
SEV3: Soit $re^{i\theta} \in E$

Si on prend $\lambda = -1$, alors on a $-re^{i\theta}$

i.e correspond à une rotation de π donc $\theta \notin [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

donc n'est pas stable par multiplication

donc E n'est pas un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{R}^2$ ✓



$= re^{i(\theta+\pi)}$

Exercice 7 - TD21

$\mathcal{M}_2 \Delta = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

SEV1: Par définition: $\Delta \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ✓

SEV2: On prend $a=0$ alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Delta$ donc $\Delta \neq \emptyset$ ✓

SEV3: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \right) \in \Delta^2$ ✓

Calculons $\lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & -\lambda b - b' \\ \lambda b + b' & \lambda a + a' \end{pmatrix}$ ✓

En posant $a'' := \lambda a + a'$ alors on a: $\begin{pmatrix} a'' & -b'' \\ b'' & a'' \end{pmatrix} \mid (a'', b'') \in \mathbb{R}^2$ donc Δ est stable par combinaison linéaire

$\text{donc } \lambda M + M' \in \Delta$

Conclusion: Δ est un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ✓

Exercice 8 - TD21

$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & bc \\ c & ab \\ b & ca \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$\mathcal{M}_3 \Gamma$ est un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

SEV1: } idem

SEV2: } exercice 7

SEV3: Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\left(\begin{pmatrix} a & bc \\ c & ab \\ b & ca \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b'c' \\ c' & a'b' \\ b' & c'a' \end{pmatrix} \right) \in \Gamma^2$

Calculons $\lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' & \lambda c + c' \\ \lambda c + c' & \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' & \lambda a + a' \end{pmatrix}$$

On pose $a'' := \lambda a + a'$

$b'' := \lambda b + b'$

$c'' := \lambda c + c'$

On a $\begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ c'' & a'' & b'' \\ b'' & c'' & a'' \end{pmatrix} \mid (a'', b'', c'') \in \mathbb{R}^3$ donc $\lambda M + M' \in \Gamma$.

donc Γ est stable par combinaison linéaire

Conclusion: Γ est un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ✓

Exercice 5 - TD 21

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 2z = 0\}$

1. Soit F est un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{R}^3$

SEV1: Par définition, $F \subset \mathbb{R}^3$ ✓

SEV2: avec le triplet $(0, 0, 0)$ on a $0 - 2 \times 0 = 0$ donc $F \neq \emptyset$ ✓

SEV3: Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$

Calculons $\lambda(x, y, z) + (x', y', z')$

$$= (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (x', y', z')$$

$$= (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$

On pose $x'' := \lambda x + x'$

$y'' := \lambda y + y'$

$z'' := \lambda z + z'$

$$= \lambda(x - 2y) = 0$$

Pas homogène: on a à gauche un triplet $\in \mathbb{R}^3$ et à droite un réel.

On a: $(x'', y'', z'') \in \mathbb{R}^3$ et aussi $\in F \rightarrow$ car $x'' - 2y'' = \dots = 0$

~~car~~ $z'' - 2y'' = 0$

donc F est stable par combinaison linéaire ✓

Conclusion: F est un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{R}^3$

De même pour G donc G est un sous- $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{R}^3$

→ À faire!