

Exercice 11:

$$f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

1) f est le quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et $1+e^{\frac{1}{x}}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, ainsi f est dérivable et continue sur $\mathbb{R}^*$. ✓

2) Faisons la DL à l'ordre 2 de $e^{\frac{1}{x}}$ en $\pm\infty$:

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o_{x \rightarrow \pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \checkmark$$

On a donc $f(x) = x \times \frac{1}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o_{x \rightarrow \pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)} = x \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+u} \right)$ avec $u = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{12x^3} + o_{x \rightarrow \pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ✓

Ainsi $f(x) = x \times \frac{1}{2} (1 - u + u^2 + o_{x \rightarrow \pm\infty}(u^2))$! il faut aussi $-u^2 + o(u^3)$ car $o(u^2) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc ce DL est en fait à l'ordre 2.

$$= x \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{12x^3} + o_{x \rightarrow \pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right) + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{6x^3} \right)$$

$$= x \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} + o_{x \rightarrow \pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{8x^2} + o_{x \rightarrow \pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

! Il faut refaire les calculs avec $-u^3$ pour trouver le bon 3^e terme.

Ainsi en $+\infty$ et $-\infty$ f admet comme courbe asymptote $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

$$\text{On a } f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8x^2} + o_{x \rightarrow \pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc $f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{8x^2} > 0$ en $\pm\infty$ ainsi $f(x)$ se trouve au dessus de ses asymptotes en $\pm\infty$

3) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{(1+e^{\frac{1}{x}}) + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2} = \frac{1 + (1 + \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$ ✓

On pose $g: t \mapsto 1 + (1+t)e^t$

$$g'(t) = e^t + (1+t)e^t = (2+t)e^t$$

On a

t	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g'(t)$	-	0	+
g	1	$1 - e^{-2}$	$+\infty$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$$

$$g(-2) = 1 - e^{-2} > 0$$

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) > 0$ ✓ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$ donc $g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + (1 + \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} > 0$ ✓

Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}^*$.

! $f > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ Qui n'est pas un intervalle. Donc $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.