Exercice 2

1) Le reste de la division euclidienne de $A = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2$, $B = (X-1)(X-2)$

$(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2 = (X-1)(X-2)\,Q(X) + R(X)$

Comme $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$ donc $R(X) = aX + b$..
(car $\deg(R) < 2$).

On évalue en $X = 1$

$\underbrace{(1-2)^{2n}} + (1-1)^n - 2 = a + b$

$(-1)^{2n}$ et $2n$ pair donc $-1^{2n} = 1$

$+1 - 2 = a + b$

On évalue en $X = 2$.

$(2-2)^{2n}(2-1)^n - 2 = 2a + b.$

$-1 = 2a + b$

On a $a = -b-1$

$-1 = 2(-b-1) + b$

$-1 = -2b - 2 + b$

$b = -1$

donc $a = 0$

Finalement $\boxed{R(X) = -1}$. ✓

2) Reste de la division euclidienne de A par $B = (X-1)^2$

$(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2 = (X-1)^2\,Q(X) + \underbrace{aX + b}$

car $\deg(R) < 2$.

On évalue en $X = 1$

$-1 = a + b.$ * ✓

Comme 1 est racine double on peut dériver pour avoir une autre équation.

$A' = 2n(X-2)^{2n-1} + n(X-1)^{n-1}$ ✓ et $R'(X) = a$

$((X-1)^2 Q(X))' = 2(X-1)\,Q(X) + (X-1)^2 Q'(X)$

On réévalue en $X = 1$.

car $(-1)^{2n-1} = -1$

$2n(-1)^{2n-1} = a \iff -2n = a.$ on a donc grâce à * $b = +2n - 1$

donc $\boxed{R(X) = -2nX + 2n - 1}$

Exercice 3

On a $P = (X-2)\,Q(X) + 3$ donc $P(2) = 3$ ✓

$P = (X+2)\,Q(X) + 2$ donc $P(-2) = 2$ ✓

$R(X) = aX + b$ car $\deg((X^2-4)) > \deg(R(X))$.

On cherche $R(X)$ dans $P = \underbrace{(X^2-4)}_{X^2 - 2^2}\,Q(X) + R(X)$

$P = (X-2)(X+2)\,Q(X) + R(X).$

Quand on évalue en $X = 2$ et $X = -2$ on a

$P(2) = 2a + b = 3$ et $P(-2) = -2a + b = 2$

$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ -2a + b = 2 \end{cases}$ ✓

On trouve $b = \frac{5}{2}$ et $a = \frac{1}{4}$ ✓

donc $\boxed{R(X) = \frac{2}{4}X + \frac{5}{2}}$ ✓

Exercice 11

Si $P = 4X^3 + 32X^2 - 35X + 9$ possède une racine multiple α on a

$P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$

Donc $P'(\alpha) = 12\alpha^2 + 64\alpha - 35 = 0$

$\Delta = 64^2 - 4\times 12 \times (-35) = 5776$ or $\sqrt{5776} = 76$

$\alpha_1 = \dfrac{-64-76}{24} = \dfrac{-35}{6}$ et $\alpha_2 = \dfrac{-64+76}{24} = \dfrac{1}{2}$

On a bien $P\left(\frac{1}{2}\right) = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 32\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{35}{2} + 9$

$= \dfrac{4}{8} + \dfrac{32}{4} - \dfrac{35}{2} + 9$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{16}{2} - \dfrac{35}{2} + \dfrac{18}{2}$

$= \dfrac{1+16-35+18}{2} = 0$

$\frac{1}{2}$ est donc bien une racine d'ordre 2 donc P est divisible par

$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 = X^2 - X + \frac{1}{4}$

$$
\begin{array}{r|l}
4X^3 + 32X^2 - 35X + 9 & X^2 - X + \frac{1}{4} \\
\cline{2-2}
-(4X^3 - 4X^2 + X) & 4X + 36 \\
\hline
36X^2 - 36X + 9 & \\
-(36X^2 - 36X + 9) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

⚠ $4X+36 = \underbrace{4(X+9)}_{\text{unitaire}}$

coefficient dominant de P

On a donc $\boxed{P(X) = 4\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \cancel{(4X+36)}}$

$X+9$

$\frac{1}{2}$ est racine double et L'autre racine est donc -9.

Exercice 12

$P_1 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$

$= (X^2 - X + 1)^2 - (i)^2$

$= (X^2 - X + 1 - i)(X^2 - X + 1 - i)$

① $\Delta_1 = -3 + 4i$ On cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = -3 + 4i$.

$$\begin{cases} 2xy = -4 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4^2)} = 5 \end{cases}$$

$\delta = \pm(1 + 2i)$

$z_1 = \dfrac{1 + (1+2i)}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \dfrac{1 - (1-2i)}{2} = -i$

② $\Delta_2 = -3-4i$ On cherche $\delta = x+iy$ tel que $-3-4i$

$$\begin{cases} 2xy = -4 \\ x^2-y^2 = -3 \\ x^2+y^2 = 5 \end{cases} \qquad \delta = \pm(1-2i)$$

$$x_1 = \frac{1-1+2i}{2} = i \qquad x_2 = \frac{1+1-2i}{2} = 1-i.$$

donc $\boxed{P_1 = (X-(1+i))(X-i)(X+i)(X-(1-i))}$

↳ Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Dans $\mathbb{R}[X]$ on regroupe les racines conjuguées.

$$P_1 = (X-(1+i))(X-(1-i))(X^2-iX+iX-1)$$

$$= (X^2 - X(1-i) - X(1+i) + 1-i^2)(X^2+1)$$

$$= (X^2 - X + iX - X - iX + 2)(X^2+1)$$

$$= (X^2$$

$$\boxed{P_1 = (X^2-2X+2)(X^2+1)}$$