Beuvrier Loutar

Fondrat Sohan.

Mathématiques

Chapitre 19 TD : Rendu

Exercice 12)

$P_1=(X^2-X+1)^2+1=(X^2-X+1+i)(X^2-X+1-i)$ ✓

On résout $X^2-X+1+i=0$

$\Delta=1-4(1+i)=-3-4i=\delta^2=x^2+2ixy-y^2$

$\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ 2xy=-4 \\ x^2+y^2=\sqrt{3^2+4^2}=5 \end{cases}$ ✓

Donc $2x^2=2$ donc $x=\pm 1$ ✓

$2y^2=8$ donc $y=\pm 2$ ✓

D'après la ligne 2, x et y ont des signes opposés. $\delta=1-2i$ ✓

$\boxed{\alpha_1=\frac{1+1-2i}{2}=1-i}$ ✓ $\boxed{\alpha_2=\frac{1-1+2i}{2}=i}$ ✓

On résout $X^2-X+1-i=0$

$\Delta=1-4(1-i)=-3+4i$

$\delta=1+2i$ ou $1-2i$

$\boxed{\alpha_3=\frac{1+1+2i}{2}=1+i}$ $=\overline{\alpha_1}$ $\boxed{\alpha_4=\frac{1-1-2i}{2}=-i}$ $=\overline{\alpha_2}$

Rem : α_1 et α_2 sont racines de $P_1\in\mathbb{R}[X]$ donc $\overline{\alpha_1}$ et $\overline{\alpha_2}$ le sont aussi

$P_1=\boxed{(X-i)(X+i)(X-1+i)(X-1-i)}$ dans $\mathbb{C}$

$=\boxed{(X^2+1)(X^2-2X+2)}$ ✓ dans $\mathbb{R}$

$P_2=X^4+X^3+X^2+X+1$

On remarque que c'est une somme géométrique.

On multiplie par $X-1$:

$\boxed{P_2(X-1)=X^5-1}$ ✓

Les racines sont les racines 5èmes de l'unité

$P_2(X-1)=(X-e^{2i\pi/5})(X-e^{4i\pi/5})(X-e^{6i\pi/5})(X-e^{8i\pi/5})(X-e^{10i\pi/5})$

$(X-e^{10i\pi/5})=X-1$

On enlève les termes en $X-1$ et on trouve

$$\left[X^4+X^3+X^2+X+1=\prod_{k=\cancel{0}\,1}^{\cancel{5}\,4}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right)\right] \text{ dans } \mathbb{C}.$$

$\cancel{P_2}$ ~~On fait le produit entre les racines polynômes~~

Autre technique :

$$\left[P_2=(X-e^{2i\pi/5})(X-e^{-2i\pi/5})(X-e^{4i\pi/5})(X-e^{-4i\pi/5})\right]$$

$$\left[P_2=\left(X^2-2\cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right)+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\tfrac{4\pi}{5}\right)+1\right)\right] \checkmark$$

Autre technique : $z^8=-1$ $\iff z=e^{\frac{i\pi}{8}+\frac{2k\pi}{8}}$ 8 solutions : $e^{\frac{i\pi}{8}}, e^{\frac{3i\pi}{8}}$, etc...

$P_3=X^8+1=(X^4-i)(X^{\cancel{8}4}+i)=(X^2-e^{i\pi/4})(X^2+e^{i\pi/4})$

$(X^2-ie^{i\pi/4})(X^2+ie^{i\pi/4})$ ✓

$=(X-e^{i\pi/8})(X+e^{i\pi/8})(X-ie^{i\pi/8})(X+ie^{i\pi/8})(X^2-e^{3i\pi/4})$

$(X^2+e^{3i\pi/4})$

$=\Big[(X-e^{i\pi/8})(X+e^{i\pi/8})(X-ie^{i\pi/8})(X+\underbrace{ie^{i\pi/8}}_{=e^{i5\pi/8}})(X-e^{3i\pi/8})(X+e^{3i\pi/8})$

$(X+ie^{3i\pi/8})(X-\underbrace{ie^{3i\pi/8}}_{=e^{7i\pi/8}=-e^{i\pi/8}})\Big]$

Pour la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

regrouper $\cancel{X}-e^{i\pi/8}$ avec $X-$

$P_4=X^8+X^4+1$. On pose $Y^{\cancel{2}}=X^4$

$\Delta=1-4=-3$ donc $Y_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{2i\pi/3}$

$Y_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-e^{i\pi/3}=e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

$X^4=e^{2i\pi/3}$ ou $e^{4i\pi/3}$

$X_1=\pm e^{2i\pi/12}$ ou $X_2=\pm e^{4i\pi/12}$ ou $X=\pm e$