Exo 7

1) • $A = X^4 - X^3 - 4X^2 - X + 1$, $B = X^3 - X^2 - 5X + 2$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & X^4 - X^3 - 4X^2 - X + 1 & X^3 - X^2 - 5X + 2 = B \\
\cline{3-3}
- & (X^4 - X^3 - 5X^2 + 2X) & X \\
\cline{1-2}
 & X^2 - 3X + 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & X^3 - X^2 - 5X + 2 & X^2 - 3X + 1 \\
\cline{3-3}
- & (X^3 - 3X^2 + X) & X + 2 \\
\cline{1-2}
 & 2X^2 - 6X + 2 & \\
- & (2X^2 - 6X + 2) & \\
\cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Ainsi : $\boxed{A \wedge B = X^2 - 3X + 1}$

et on a $A = (X^2 - 3X + 1) \times (X^2 + 2X + 1) = (A \wedge B) \times (X+1)^2$

$B = (X^2 - 3X + 1) \times (X + 2) = (A \wedge B) \times (X+2)$

• On a : $(A \vee B)(A \wedge B) = \dfrac{1}{cd(A) \times cd(B)} AB$

Donc : $A \vee B = \dfrac{AB}{A \wedge B} = \dfrac{A \times (X+2) \times A \wedge B}{A \wedge B} = \boxed{A(X+2)}$

2) On remarque que A et B sont décomposés en produit d' ~~sous forme~~ irréductibles

Donc : $\boxed{A \wedge B = (X-1)^2}$

Et : $\boxed{A \vee B = (X-1)^3 (X+2)^2 (X-3)}$

(En utilisant les formules :

$A \wedge B = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ et $A \vee B = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$

avec P_i irréductible)