$25X - 5$

Exercice 4 : A rendre

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui vérifie $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = O_3$

1. $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = O_3$

$\iff A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_3$

$\iff A(A^2 - 4A + 5I_3) = 2I_3$

$\iff A \times \frac{1}{2}\left(\frac{A^2 - 4A + 5I_3}{\cancel{2}}\right) = I_3$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{A^2 - 4A + 5I_3}{\cancel{2}}\right)$

2. Faisons la div. eucl. de X^n par $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$

$$X^n = (X^3 - 4X^2 + 5X - 2)\,Q_n + R_n \qquad (E)$$

$R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$ car $\deg(R) < 3$

Cherchons les racines de $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$

- 1 est racine évidente :

D'où en évaluant en 1 : $1^n = a_n + b_n + c_n$

• De plus $X^3-4X^2+5X-2 = (X-1)(X^2-3X+2)$

Les racines de X^2-3X+2 sont aussi racines de X^3-4X^2+5X-2

$\Delta = (-3)^2 - 4\times 2 = 1$

$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = 2$ ou 1

On évalue en 2 (E)

$$2^n = 4a_n + 2b_n + c_n$$

Donc on obtient :

$$\begin{cases} 1 = a_n + b_n + c_n \\ 2^n = 4a_n + 2b_n + c_n \end{cases}$$

Dérivons (E) :

$$nX^{n-1} = Q_n(3X^2-8X+5) + (X^3-4X^2+5X-2)Q_n' + (2a_nX+b_n)$$

On évalue en 1 :

$$n = 2a_n + b_n$$

D'où

$$\begin{cases} a_n+b_n+c_n = 1 \\ 4a_n+2b_n+c_n = 2^n \\ 2a_n+b_n = n \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a_n+b_n+c_n = 1 \\ -2b_n - 3c_n = 2^n - 4 \\ -b_n - 2c_n = n-2 \end{cases} \underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a_n+b_n+c_n = 1 \\ -b_n - 2c_n = n-2 \\ -2b_n - 3c_n = 2^n - 4 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a_n+b_n+c_n = 1 \\ -b_n - 2c_n = n-2 \\ c_n = 2^n - 4 - 2n + 4 = 2^n - 2n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_n = 1 - b_n - c_n = 1 + 2^{n+1} - 3n - 2 - 2^n + 2n = 2^{n+1} - 2^n - n - 1 = 2^n(-1+2) - n - 1 = 2^n - n - 1 \\ b_n = -n + 2 - 2c_n = -n + 2 - 2^{n+1} + 4n = -2^{n+1} + 3n + 2 \\ c_n = 2^n - 2n \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} a_n = 2^n - n - 1 \\ b_n = -2^{n+1} + 3n + 2 \\ c_n = 2^n - 2n \end{cases}$$

3. On a $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = 0_3$

En évaluant par A (E) :

$$A^n = \underbrace{(A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3)}_{=0} Q_n(A) + (a_n A^2 + b_n A + c_n I_3)$$

Donc

$$A^n = (2^n - n - 1)A^2 + (-2^{n+1} + 3n + 1)A + (2^n - 2n) I_3$$