Robert-Tenme
Leliboum

Sillos
Jambon

TD 19

Exercice 22 :

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Decomposons $\frac{1}{k(k+1)}$

Écrivez plutôt $\frac{1}{X(X+1)}$ pour qu'on la considère comme une fraction rationnelle.

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

• Multiplication evaluation :

On a $\frac{1}{k+1} = a + \frac{bk}{k+1}$

On evalue en 0 :

donc $1 = a$ ✓

On a $\frac{1}{k} = \frac{a(k+1)}{k} + b$

On evalue en -1 :

donc $-1 = b$ ✓

D'où $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$, somme telescopique

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \boxed{\frac{n}{n+1}}$$ ✓

(b) $\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{4k-1}{k(k+2)}}_{:=D} 3^{k-1} := F$

On a $\deg D < 0$ donc la partie entière est nulle

$\begin{cases} \text{zero} : \frac{1}{4} \\ \text{pôles} : -2 \text{ et } 0 \end{cases}$

On a $\dfrac{4k-1}{k(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2}$ ← Écrire plutôt $\dfrac{4X-1}{X(X+2)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+2}$.

Multiplication évaluation :

On a $\dfrac{4k-1}{k+2} = a + \dfrac{bk}{k+2}$

On évalue en 0, donc $a = -\dfrac{1}{2}$

On a $\dfrac{4k-1}{k} = \dfrac{a(k+2)}{k} + b$

On évalue en -2, donc $b = \dfrac{9}{2}$

Donc $D_{(k)} = \dfrac{-1/2}{k} + \dfrac{9/2}{k+2}$

Donc on a

$$\sum_{k=1}^{n} D_{(k)} \times 3^{k-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k} + \frac{9}{k+2}\right)\times 3^{k-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k-1}}{k} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k+1}}{k+2}}_{\text{on pose } j := k+2}$$

$$= -\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k}}{k} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{j=3}^{n+2}\frac{3^{j-1}}{j}}_{= \left(\sum_{j=1}^{n+2}\frac{3^{j-1}}{j} \underbrace{- 1 - \frac{3}{2}}_{\text{terme en } j=1 \text{ et } j=2}\right)}$$

Donc

$$\boxed{F} = -\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k}}{k} + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{3^{j-1}}{j} - 1 - \frac{3}{2} + \underbrace{\frac{3^{n+1}}{n+2} + \frac{3^{n}}{n+1}}_{\text{terme en } (n+2) \text{ et } (n+1)}\right)$$

$$= \boxed{\frac{3^{n+1}}{n+2} + \frac{3^{n}}{n+1} - \frac{5}{4}}$$