THIA
Charles
ZITTE
Mathis

T.D n° 19 de maths

Exercice 16 :

a) Résoudre $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-2 \\ xyz=-4 \end{cases}$

Soit P un polynôme ayant pour racines x, y et z.
(P admet 3 racines donc est de degré 3).
On note a_0, a_1, a_2 et a_3 ses coefficients, avec $a_3 \neq 0$.
On remarque que $\begin{cases} x+y+z = \sigma_1 = 0 \\ xy+yz+zx=-2 = \sigma_2 \\ xyz = -4 = \sigma_3 \end{cases}$

On peut s'imposer $a_3 = 1$

Donc $\begin{cases} \frac{a_2}{a_3} = 0 = x+y+z \\ \frac{a_1}{a_3} = xy+yz+zx=-2 \checkmark \\ \frac{-a_0}{a_3} = xyz = -4 \checkmark \end{cases}$

donc $\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 = -2a_3 \\ a_0 = 4a_3 \end{cases}$

Or, $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$
donc $P = a_3X^3 - 2a_3X + 4a_3$
$= a_3(X^3 - 2X + 4)$ ✓ Il faut alors résoudre $X^3 - 2X + 4 = 0$

-2 est une racine évidente de $X^3 - 2X + 4$.

Donc $X^3 - 2X + 4 = (X+2)(X^2 - 2X + 2)$, obtenue en faisant la div. eucl. de $X^3 - 2X + 4$ par $X + 2$

On résout $X^2 - 2X + 2$: $\Delta = 4 - 8 = -4$

donc $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i$ ✓

Donc $\boxed{x = -2}$, $\boxed{y = 1 + i}$ et $\boxed{z = 1 - i}$ (ou (x,y,z) est une permutation de ces 3 valeurs)

2)
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 18 \end{cases}$$

On a $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx)(x+y+z) \\
&= x^3 + xy^2 + xz^2 + 2x^2y + 2xyz + 2zx^2 + \\
&\quad yx^2 + y^3 + yz^2 + 2xy^2 + 2y^2z + 2zxy \\
&\quad + x^2z + y^2z + z^3 + 2xyz + 2yz^2 + 2z^2x \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 2(x^2y + xyz + zx^2 + xy^2 + \\
&\quad y^2z + zxy + xyz + yz^2 + z^2x) + xy^2 + \\
&\quad xz^2 + yx^2 + yz^2 + x^2z + y^2z \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + zx^2 + xy^2 + z^2x + yz^2 \\
&\quad + y^2z) + 6xyz\end{aligned}$$

Soit S un polynôme dont les racines sont x, y et z.
On a $S = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ car 3 racines donc de degré 3.

On a $(x+y+z)^2 = \sigma_1^2 = \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=14} + 2\sigma_2$

donc $0 = 14 + 2\sigma_2$ i.e $\sigma_2 = -7$ ✓

donc $\boxed{a_1 = -7a_3}$ ✓

De plus, $(x+y+z)^3 = \sigma_1^3 = \overbrace{x^3+y^3+z^3}^{=18} + 3\left(x^2(x+y+z)-x^3 + y^2(x+y+z)-y^3 + z^2(x+y+z)-z^3\right) + 6\underbrace{xyz}_{=\sigma_3}$ ✓

donc $\sigma_1^3 = 0 = 18 - 3\underbrace{(x^3+y^3+z^3)}_{18} + 6\sigma_3$

donc $\sigma_3 = \frac{-18+3\times 18}{6} = 6$

donc $\boxed{a_0 = -6a_3}$ ✓

De plus, $\sigma_1 = 0$ donc $\boxed{a_2 = 0}$

Donc $P = a_3(X^3 \qquad -7X-6)$

Rem : on peut toujours supposé le polynôme unitaire, ce qui évite de réécrire a_n (ici a_3) en facteurs de tout le polynôme.

→ -1 est racine évidente,

on a

$$X^3-7X-6 = (X+1)\underbrace{(X^2-X-6)}_{\Delta = 25,\ 2 \text{ racines}}$$

$$\frac{1\pm 5}{2} = 3 \text{ ou } -2$$

Donc $X^3-7X-6 = (X+1)(X+2)(X-3)$

Donc x, y, z valent -1, -2 et 3 (dans un ordre quelconque)