Noah Exo 9
Corbi

• Mq $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples

Supposons que P admet une racine multiple α.

Alors $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$

donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{\alpha}^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{\alpha}^{k-1}}{(k-1)!}$

donc $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\cancel{\alpha}^k}{k!} - \frac{\cancel{\alpha}^{k-1}}{(k-1)!} \right) + 1 = 0$

donc $\frac{\cancel{\alpha}^n}{n!} - 1 + 1 = 0$

donc $\frac{\alpha^n}{n!} = 0$

Ainsi $\alpha = 0$

or $P_n(0) = \sum_{k=0}^{0} \frac{0^k}{k!} = 1$ donc 0 n'est pas une racine

c'est absurde.

On a donc que P_n n'admet aucune racines multiples et n'admet alors que des racines simples.

• On a $P_0 = 1$ 0 racine
$P_1 = 1 + X$ 1 racine réel
$P_2 = 1 + X + \frac{1}{2}X^2$ $\Delta = 1 - 2 = -1 < 0$ donc 0 racine réel.

~~Alors~~
On conjecture que si n pair P_n n'a pas de racine

sinon il en admet une.

On a $\boxed{P_{n+1}' = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{k}}{k!} = P_n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$:= " P_n admet 0 racine réel si n est pair, 1 sinon "

Initialisation:

Pour $n = 0$

$P_0 = 1$, P_0 n'a pas de racine réel et 0 est pair cela prouve $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$:

- Si n est pair:

P_n a 0 racine or $P_{n+1}' = P_n$

comme tous les polynomes sont continues sur $\mathbb{R}$ et que $P_{n+1}'(0) = P_n(0) = 1$ alors P_{n+1}' est strictement positif, car si il ne l'était pas alors d'aprés le TVI P_{n+1}' s'annulerait et donc P_n aussi ce qui est absurde.

Ainsi P_{n+1} est $\nearrow\nearrow$.

Comme $n+1$ est impair la puissance de X la plus grande est impair et $Cd(P_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.

Ainsi $\lim_{X \to -\infty} P_{n+1}(X) = -\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} P_{n+1}(X) = +\infty$

~~par croissance comparée.~~

corollaire du

D'après le TVI, il n'y a qu'une seul solution à l'équation $P_{n+1}(X)=0$.

Donc P_{n+1} admet une seul racine si $n+1$ est impair.

Si ~~n est impair~~ :

P_n a 1 racine

$P_{n+1}' = P_n$. P_{n+1} admet donc un minimum en α

or $P_{n+1} = P_n + \frac{X^{n+1}}{(n+1)!}$ donc $P_{n+1}(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}$

comme $n+1$ est pair $\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} > 0$ car $\alpha \neq 0$ ainsi

P_{n+1} n'admet pas de racine si $n+1$ est pair.

* De plus $\lim_{x \to \pm\infty} P_n(x) = \pm\infty$ car P_n est degré ~~impair~~ impair et de coeff. dominant >0.

Donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$P_n(x)$		$-$	0	$+$	