MPSI
Olivier PEDRE
Ruben Lebreton
RANDRIANASOLO Georges

Ex 25 :

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^3+2}{x(x^2+1)}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ ou sur l'intervalle $\mathbb{R}^{-*}$

Pour chercher une primitive, nous pouvons passer par une intégrale : $\displaystyle\int^x \frac{t^3+2}{t(t^2+1)}\,dt$.

Utiliser plutôt la notation X^3+2 pour bien distinguer le polynôme du nombre t^3+2.

Résolution :

$$\int^x \frac{t^3+2}{t(t^2+1)}\,dt$$

$$= \int^x \frac{t(t^2+1)-t+2}{t(t^2+1)}\,dt$$

$$= \int^x 1\,dt - \int^x \frac{t-2}{t(t^2+1)}\,dt$$

$$= x - \int^x \frac{1}{t^2+1}\,dt + 2\int^x \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt$$

$$= x - \arctan(x) + 2\int^x \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\,dt$$

$$= x - \arctan(x) + 2\ln(|x|) - \ln(x^2+1)$$

Tout d'abord faisons la division euclidienne de t^3+2 par t^2+1 :

$$\begin{array}{r|l} t^3+2 & t^2+1 \\ -t^3+t & t \\ \hline -t+2 & \end{array}$$

d'où $t^3+2 = t(t^2+1) - t + 2$

* décomposition en élément simple.

donc une primitive de f est :

$$F(x) = x - \arctan(x) + 2\ln(x) - \ln(x^2+1)$$

* Décomposition en élément simple : $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 /$ ← À faire avant.

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}$$

Mult par t éval en 0

- en 0 : $\dfrac{1}{t^2+1} = a + \dfrac{t(bt+c)}{t^2+1}$ donc $a = 1$
- en $+\infty$: $\dfrac{1}{t^2+1} = a + \dfrac{bt^2}{t^2+1} + \dfrac{ct}{t^2+1}$ donc $0 = a + b \Leftrightarrow b = -1$
- en 1 : $\dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{-1+c}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{c}{2} \Leftrightarrow c = 0$

sur l'intervalle $]1;+\infty[$ ou sur $]-\infty;1[$.

Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$. Nous faisons de même que f.

On trouve que 1 est racine évidente de x^3-1 donc on divise x^3-1 par $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x-1 \\ -\ x^3-x & \overline{x^2+1} \\ \hline x-1 & \\ -\ x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Écrivez plutôt X^3-1 pour le distinguer du nombre x^3-1

d'où $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^3-1}\,dt = \int^x \frac{1}{(t-1)(t^2+1)}\,dt$

Décomposition en élément simple : $\exists(\alpha,\beta,\lambda)\in\mathbb{R}^3 /$

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+1)} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta t+\lambda}{t^2+1}$$

Multiplions par $t-1$ puis évaluation en 1

en 1 : $\dfrac{1}{t^2+1} = \alpha + \dfrac{(t-1)(\beta t+\lambda)}{t^2+1}$ donc $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{2}}$ ✓

en $+\infty$: $\dfrac{1}{t^2+1} = \alpha + \dfrac{\beta t^2 + \lambda t \cancel{-\beta t - \lambda}}{t^2+1}$ donc $0 = \alpha+\beta$

$\iff \boxed{\beta = -\dfrac{1}{2}}$ ✓

en 0 : $-1 = -\dfrac{1}{2} + \lambda$ donc $\boxed{\lambda = -\dfrac{1}{2}}$ ✓

Ainsi : $\displaystyle\int^x \frac{1}{(t-1)(t^2+1)}\,dt = \int^x \left(\frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2\, t + 1/2}{t^2+1}\right)dt$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) ✓ - \frac{1}{2}\int^x \frac{t+1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{4}\int^x \frac{2(t+1)}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{4}\int^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt - \frac{1}{4}\int^x \frac{2}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan(x) + \text{Constante}$$