Mathieu / Charlotte
Imane

24/03/2026
MPSI

Séance de TD - Maths

Exercice 17

Déterminons a, b et c tels que : $\dfrac{X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 2}{X^3(X^4 - 1)^2} = F(X)$

sachant qu'il ait
- 0 comme pôle triple
- -1 comme pôle simple

} les seuls pôles réels

Posons $N(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 2$
et $D(X) = X^3(X^4 - 1)^2$

*Factorisons D(X) :

$(X^4 - 1) = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$
donc $D(X) = X^3 (X - 1)^2 (X + 1)^2 (X^2 + 1)^2$ ✓
donc admet 0, 1 et -1 comme racines réelles

- 0 est un pôle triple : dans D(X), 0 a une multiplicité de 3 donc il faut que $N(0) \neq 0$ ✓
or $N(0) = 0^4 + a0^3 + b0^2 + c\,0 + 2 = 2$, ce qui est vérifié ✓

- -1 est un pôle simple : dans D(X), -1 a une multiplicité de 2 donc N(X) doit se simplifier une fois par (X+1)
il faut que $N(-1) = 0$ et il faut que $N'(-1) \neq 0$
(sinon ce ne serait plus un pôle du tout)

- 1 n'est pas un pôle : dans D(X), multiplicité de 2
donc il faut que $N(1) = 0$ et $N'(1) = 0$ ✓

On a $N'(X) = 4X^3 + 3aX^2 + 2bX + c$

- $\boxed{N(1) = 0} \iff 1 + a + b + c + 2 = 0$
  $\iff \boxed{a + b + c = -3}$ ✓

- $\boxed{N'(1) = 0} \iff 4 + 3a + 2b + c = 0$
  $\iff \boxed{3a + 2b + c = -4}$ ✓

- $\boxed{N(-1) = 0} \iff 1 - a + b - c + 2 = 0$ ✓
  $\iff \boxed{-a + b - c = -3}$ ✓

On obtient le système suivant:

$$\begin{cases} a + b + c = -3 \\ 3a + 2b + c = -4 \\ -a + b - c = -3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} a + b + c = -3 \\ -b - 2c = 5 \checkmark \\ 2b = -6 \checkmark \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -3 - b - c \\ -2c = 5 + b \\ b = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ c = \dfrac{5-3}{-2} = -1 \checkmark \\ b = -3 \checkmark \end{cases}$$

On a finalement : $\boxed{a = 1 \ ; \ b = -3 \ ; \ c = -1}$

donc $\boxed{N(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2}$ ✓