Privat
Gabriel
Maxime Eecke

Exercice 15 : On remarque déjà que $cd(X^3) = 1$

$X^3 + pX + q = (X-a)(X-b)(X-c)$ avec a, b et les racines de X^3+pX+q

On développe :

$$(X-a)(X-b)(X-c) = (X^2 - bX - aX + ab)(X-c)$$
$$= X^3 - bX^2 - aX^2 + abX - cX^2 + cbX + caX - cab$$
$$= X^3 - \underbrace{(b+a+c)}_{=\sigma_1}X^2 + \underbrace{(ab+cb+ac)}_{=\sigma_2}X - \underbrace{cab}_{=\sigma_3}.$$

On identifie :
$$\begin{cases} b+a+c = 0 \\ ab+bc+ac = p \\ cab = q \end{cases}$$

On cherche $a^2+b^2+c^2$; $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$ et $a^2b^2c^2$

On fait $(abc)\times(abc) = q\times(abc)$
$$a^2b^2c^2 = q^2$$

Ensuite on fait $(a+b+c)(a+b+c) = 0\times(a+b+c)$
$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) = 0$$

Donc on trouve :
$$a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ac)$$

Ensuite on fait $(ab+bc+ac)(ab+bc+ac) = p\times(ab+bc+ac)$
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\underbrace{(ab^2c+a^2bc+abc^2)}_{0=abc\times(a+b+c)} = p^2$$
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = p^2 - 2(ab^2c+a^2bc+abc^2)$$

On a
$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca) = \sigma_1 \\ a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 = p^2-2(ab^2c+a^2bc+abc^2) = \sigma_2 \\ a^2b^2c^2 = q^2 = \sigma_3 \end{cases}$$

On écrit donc le polynôme unitaire dont les seules racines sont a^2, b^2 et c^2 est : $x^3 - \tilde{\sigma}_1 x^2 + \tilde{\sigma}_2 x - \tilde{\sigma}_3$

D'où $\underline{x^3 + 2(ab + bc + ac)x^2 + (p^2 - 2(ab^2c + a^2bc + abc^2))x - q^2}$

D'où $\underline{x^3 + 2p x^2 + p^2 x - q^2}$ ✓