Ex 13 du TD19

Analyse soit $P \in \mathbb{C}[X]$ / $P' | P$.

- Alors $\exists Q \in \mathbb{C}[X]$ / $P = Q \times P'$

et l'on a $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(P')$

or, dès que $\deg(P) \geqslant 1$, on a $\deg(P') = \deg(P) - 1$

Donc si P n'est pas constant (cas exclu provisoirement)

on a $\deg(Q) = 1$.

de plus $cd(P) = cd(Q) \times \underbrace{cd(P')}_{= n\, cd(P)}$ où $n := \deg(P)$

donc $cd(Q) = \frac{1}{n}$.

Ainsi, $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ / $Q = \frac{1}{n}(X - \alpha)$, et on a

$$P = \frac{1}{n}(X-\alpha) P'.$$

α est donc une racine de P.

<u>Supposons que P admette une autre racine $\beta \neq \alpha$.</u>

Notons m sa multiplicité.

Alors $(X-\beta)^{m-1} \mid P = \frac{1}{n}(X-\alpha) P'$ or $(X-\beta) \wedge (X-\alpha) = 1$

donc d'après le thm. de Gauss $(X-\beta)^{m-1} \mid P'$.

ce qui fait que β est racine de P' de multiplicité supérieure à m : <u>absurde</u> car le cours affirme qu'elle est de multiplicité $m-1$.

<u>Conclusion</u> : α est la seule racine de P

Ainsi, P ne possède qu'une seule racine qui est α

il est donc de la forme

$$P = \lambda \times (X-\alpha)^n.$$

Cas des polynômes constants.

Si $P = \lambda$ alors $P' = 0_{\mathbb{R}[X]}$ or 0 ne peut diviser P que si P vaut lui-même 0 :

la seule solution constante est donc $0_{\mathbb{R}[X]}$.

Synthèse : • si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ alors P est solution.

• si $P = \lambda (X-\alpha)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$

alors $P' = \lambda n (X-\alpha)^{n-1}$ et donc

$$P = \frac{1}{n}(X-\alpha) \times P' \quad \text{donc } P' | P.$$

Conclusion :

$$\{P \in \mathbb{C}[X] / P' | P\} = \{\lambda (X-\alpha)^n ;\ \lambda \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}\}$$