Mahé
Palama
Mattéo
Salim
Noé
Oune Bire

TD 19

Écrire plutôt X^2-1.

exercice 24

$x^2 - 1$ admet -1 et 1 comme racines

et $x^5 + 1$ admet aussi -1 comme racine

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 + 1 & x+1 \\
\cline{2-2}
-(x^5 + x^4) & x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\
\cline{1-1}
-x^4 + 1 & \\
-(-x^4 - x^3) & \\
\cline{1-1}
x^3 + 1 & \\
-(x^3 + x^2) & \\
\cline{1-1}
-x^2 + 1 & \\
-(-x^2 - x) & \\
\cline{1-1}
x + 1 & \\
-(x + 1) &
\end{array}
$$

ainsi la forme irréductible de $f(x)$ est

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x - 1}$$

on calcule la partie entière et polaire

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 & x - 1 \\
\cline{2-2}
- x^4 + x^3 & x^3 + x \\
\cline{1-1}
x^2 - x + 1 & \\
- x^2 + x & \\
\cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

ainsi $f(x) = (x^3 + x) + \dfrac{1}{x - 1}$

$f'(x) = 3x^2 + 1 - (x-1)^{-2}$

$f''(x) = 6x + 2(x-1)^{-3}$

$f^{(3)}(x) = 6 - 6(x-1)^{-4}$

$f^{(4)}(x) = 24(x-1)^{-5}$

on conjecture donc, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(n) : \text{"} \frac{d^n\left(\frac{1}{x-1}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \text{"}$$

Initialisation :

$$\frac{d^0\left(\frac{1}{x-1}\right)}{dx^0} = \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^0\, 0!}{(x-1)^1} = \frac{1}{x-1}$$

prouve $P(0)$ ✓

Hérédité soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$

$$\frac{d^{n+1}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{dx^{n+1}} = \frac{d\left(\frac{d^n\left(\frac{1}{x-1}\right)}{dx^n}\right)}{dx} = \frac{d\left((-1)^n n!\,(x-1)^{-(n+1)}\right)}{dx}$$

$$= (-1)^n n!\,\frac{d\left((x-1)^{-(n+1)}\right)}{dx} = (-1)^n \times n! \times (-1) \times (n+1) \times (x-1)^{-(n+2)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$ ✓ ce qui prouve $P(n+1)$ ✓

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}$ $$\frac{d^n\left(\frac{1}{x-1}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)^{n+1}}$$ ✓

et donc $\forall n \geqslant 4$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - (x^3+x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

la courbe de $x \mapsto x^3 + x$ est donc une courbe asymptotique à celle de f en $+\infty$ ✓

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f'(x) - (3x^2+1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{(x-1)^2} = 0$

la courbe de $x \mapsto 3x^2 + 1$ est donc une courbe asymptotique à celle de f' en $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f''(x) - 6x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-1)^3} = 0$

la courbe de $6x$ est donc une courbe asymptotique à celle de f'' en $+\infty$

Mahé
Mattéo
Noé

- $\lim_{x \to +\infty} \left(f^{(3)}(x) - 6 \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{(x-1)^4} = 0$

donc $f^{(3)}$ admet une asymptote horizontale : $y = 6$
en $+\infty$

- pour $n \geqslant 4$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \, n!}{(x-1)^{n+1}}$$

donc $\lim_{x \to +\infty} f^{(n)}(x) = 0$

ainsi $f^{(n)}$ admet une asymptote horizontale $y = 0$
en $+\infty$