Exercice 5:

$P = aX^{n+1} + bX^n + 1$

Si $(X-1)^2 \mid P$ alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X] \ / \ P = Q(X-1)^2$

$$aX^{n+1} + bX^n + 1 = Q(X-1)^2$$

On a même un ssi : $(X-1)^2 \mid P \iff 1$ est racine multiple de $P \iff \begin{cases} P(1)=0 \\ P'(1)=0 \end{cases}$

On évalue en 1: $a + b + 1 = 0$

On dérive : $P' = (n+1)aX^n + nbX^{n-1} = 2Q(X-1) + Q'(X-1)^2$

On évalue en 1: $(n+1)a + nb = 0$

Donc $\begin{cases} a+b+1=0 \\ (n+1)a + nb = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1-b \\ (n+1)(-1-b) + nb = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = -1-b \\ -n - nb - 1 - b + nb = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = -1 + n + 1 = n \\ b = -n-1 = -(n+1) \end{cases}$

Donc $P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$

On vérifie avec $X=1$.

Donc $P(1) = n - n - 1 + 1 = 0$

Donc on a P est divisible par $(X-1)^2$ pour $a = n$ et $b = -(n+1)$

Exercice 12:

$P_1 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$

$= (X^2 - X + 1 - i)(X^2 - X + 1 + i)$

• $X^2 - X + 1 - i = 0$

$\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i$

On cherche x et y tels que $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = -3 + 4i$

On a $(1+2i)^2 = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$

donc $\delta = \pm(1+2i)$

donc $X_1 = \frac{1+1+2i}{2} = 1 + i$

et $X_2 = \frac{1-1-2i}{2} = -i$

Rem : comme $P_1 \in \mathbb{R}[X]$, et $1+i$ et $-i$ sont racines, alors leurs conjuguées aussi : $1-i$ et $+i$

• $X^2 - X + 1 + i = 0$

$\Delta = -3 - 4i$

On cherche x et y tels que $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = -3 - 4i$

On a $(1-2i)^2 = -3 - 4i$

donc $\delta = \pm(1-2i)$

donc $X_3 = \frac{1+1-2i}{2} = 1 - i$

et $X_4 = \frac{1-1+2i}{2} = i$

Donc $P_1 = (X+i)(X-i)(X-1-i)(X-1+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$

$P_1 = (X^2+1)(X^2 - X + iX - X + 1 - i - iX + i + 1)$

$= (X^2+1)(X^2 - 2X + 2)$ dans $\mathbb{R}[X]$

$P_2 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

$= \sum_{k=0}^{4} X^k = \frac{X^5-1}{X-1}$ → dans $\mathbb{R}(X)$

car somme géométrique

et $X^5 - 1 = \prod_{k=0}^{4}(X - e^{\frac{2ik\pi}{5}}) = \prod_{k=1}^{4}(X-e^{\frac{2ik\pi}{5}})(X-1)$

donc $P_2 = \prod_{k=1}^{4}(X - e^{\frac{2ik\pi}{5}})$ dans $\mathbb{C}[X]$

$P_2 = (X-e^{\frac{2i\pi}{5}})(X-e^{-\frac{2i\pi}{5}})(X-e^{\frac{4i\pi}{5}})(X-e^{-\frac{4i\pi}{5}})$

$= (X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X+1)(X^2-2\cos(\frac{4\pi}{5})X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$

$P_3 = X^8+1$ $\quad \cancel{X}^8 = -1 \iff \cancel{X}^8 = e^{i\pi+2k\pi}$

Choisir une autre lettre que X.

$\iff \cancel{X} = e^{\frac{i\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}}$

$P_3 = (X-e^{\frac{i\pi}{8}})(X-e^{\frac{15i\pi}{8}})(X-e^{\frac{3i\pi}{8}})(X-e^{\frac{13i\pi}{8}})(X-e^{\frac{5i\pi}{8}})(X-e^{\frac{11i\pi}{8}})(X-e^{\frac{7i\pi}{8}})(X-e^{\frac{9i\pi}{8}})$ dans $\mathbb{C}[X]$

$P_3 = (X^2-2\cos(\frac{\pi}{8})X+1)(X^2-2\cos(\frac{3\pi}{8})X+1)(X^2-2\cos(\frac{5\pi}{8})X+1)(X^2-2\cos(\frac{7\pi}{8})X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$

★ Il faut remarquer que $e^{i\frac{9\pi}{8}} = e^{-i\frac{7\pi}{8}}$, $e^{i\frac{11\pi}{8}} = e^{-i\frac{5\pi}{8}}$ etc.

$P_4 = X^8+X^4+1$

$= \sum_{k=0}^{2}(X^4)^k = \frac{(X^4)^3-1}{X^4-1} = \frac{X^{12}-1}{X^4-1}$ → Dans $\mathbb{C}(X)$

$P_4 = (X-e^{\frac{i\pi}{6}})(X-e^{\frac{i\pi}{3}})(X-e^{\frac{2i\pi}{3}})(X-e^{\frac{5i\pi}{6}})(X-e^{\frac{7i\pi}{6}})(X-e^{\frac{4i\pi}{3}})(X-e^{\frac{5i\pi}{3}})(X-e^{\frac{11i\pi}{6}})$ dans $\mathbb{C}[X]$

car dans les racines $12^{\text{ème}}$ de l'unité, on enlève celles qui sont aussi racines $4^{\text{ème}}$ de l'unité.

$P_4 = (X^4+1)^2 - X^4$ car $(X^4+1)^2 = X^8+2X^4+1$

$= (X^4+1-X^2)(X^4+1+X^2)$

$= ((X^2+1)^2-3X^2)((X^2+1)^2-X^2)$ car $(X^2+1)^2 = X^4+2X^2+1$

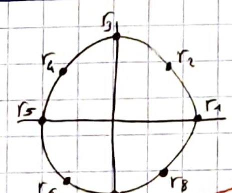
$= (X^2+1-\sqrt{3}X)(X^2+1+\sqrt{3}X)(X^2+1+X)(X^2+1-X)$ dans $\mathbb{R}[X]$

$P_5 = X^n - 1$

$= \prod_{k=0}^{n-1}(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ dans $\mathbb{C}[X]$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

- Si n est pair : -1 et 1 sont les seules racines réelles distinctes



On numérote les racines jusqu'à n et on remarque qu'il y a $\frac{n}{2}-1$ racines complexes >0 et $\frac{n}{2}-1$ racines ~~complexes <0~~

de parties imaginaires <0

Donc $X^n-1 = (X+1)(X-1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}})\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(X-e^{-\frac{2ik\pi}{n}})$

$= (X+1)(X-1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}})(X-e^{-\frac{2ik\pi}{n}})$

$= (X+1)(X-1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(X^2-2\cos(\frac{2k\pi}{n})X+1)$

- <u>Si n est impair :</u> 1 est la seule racine réelle

On numérote les racines jusqu'à n et on remarque qu'il y a $\frac{n-1}{2}$ racines complexes >0 et $\frac{n-1}{2}$ racines complexes <0

de parties imaginaires >0

donc $$X^n-1=(X-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

$$=(X-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

$$=(X-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X^2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X+1\right)$$ ✓