TD 18

Matteo SALEM
Noé OUNE-BIVE
Mahé PALAMA

exercice 9

on pose $p = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 5$

on cherche tous les $n \in \mathbb{Z}$ tel que $p \in \mathcal{P}$

<u>analyse</u>

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 5 = (n+1)^4 + 4$$
$$= ((n+1)^2)^2 - (2i)^2$$
$$= ((n+1)^2 + 2i)((n+1)^2 - 2i)$$

on cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x+iy)^2 = 2i$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 2i$ et $|(x+iy)^2| = x^2 + y^2 = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ xy = 1 \end{cases}$ on a donc $(1+i)^2 = 2i$ ✓

ou $(-1-i)^2 = 2i$

ainsi

$$((n+1)^2 + 2i)((n+1)^2 - 2i) = ((n+1)^2 - i^2(1+i)^2)((n+1)^2 - (1+i)^2) ✓$$
$$= ((n+1)^2 - (-1+i)^2)((n+1)^2 - (1+i)^2) ✓$$
$$= (n+1-1-i)(n+1+1+i)(n+1-i+1)(n+1+i-1) ✓$$
$$= (n-i)(n+2+i)(n+2-i)(n+i)$$
$$= (n-i)(n+i)(n+2+i)(n+2-i) ✓$$

or $\forall z \in \mathbb{C}$ $z \times \bar{z} = |z|^2$

$p = (n^2+1)((n+2)^2+1) = (n^2+1)(n^2+4n+5)$ ✓

on sait que un nombre premier n'est divisible que par 1 et lui même, donc forcément l'un des facteur est ± 1 et l'autre est p

<u>cas 1</u>

$n^2 + 1 = 1$

$\Leftrightarrow n^2 = 0$

$\Leftrightarrow n = 0$

et donc cas

$p(n) = 5 \in \mathcal{P}$.

et $n^2 + 4n + 5 = p$

inutile

$\Leftrightarrow n^2 + 4n + 5 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 5$

$\Leftrightarrow n^4 + 4n^3 + 5n^2 = 0$

$\Leftrightarrow n^2(n^2 + 4n + 5) = 0$

$n^2 = 0$ ou $\Delta = 16 - 4 \times 5$

$\Leftrightarrow n = 0$ $= -4$

<u>cas 2</u>

$n^2 + 4n + 5 = 1$ $\Delta = 16 - 16 = 0$ $n = \frac{-4}{2} = -2$

$\Leftrightarrow n^2 + 4n + 4 = 0$

synthèse

1er cas

on vérifie pour $n = 0$

$$0^4 + 4\times 0^3 + 6\times 0^2 + 4\times 0 + 5 = 5$$

5 est bien premier ✓

2ème cas

on vérifie pour $n = -2$

$$(-2)^4 + 4(-2)^3 + 6(-2)^2 + 4\times(-2) + 5 = 16+(-32) + 24+(-8)+5 = 5$$

5 est bien premier

conclusion

les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 6n + 5$

sont 0 et -2

⚠ Il restait un 3e cas : $n^2 + 4n + 5 = -1$

$\Leftrightarrow n^2 + 4n + 6 = 0$

mais ce cas ne se produit jamais

car $\Delta < 0$

(ciblen, le 4e cas, $n^2 + 1 = -1$ ne se produit jamais).