Randrianasolo Georges Lebreton Ruben

Pedre Olivier

Exercice 7) Soient $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$

(a): $221x + 247y = 15$

• Calcul de : $221 \wedge 247$:

$247 = 221 \times 1 + 26$

$221 = 26 \times 8 + 13$

$26 = 13 \times 2 + 0$

Ainsi : $221 \wedge 247 = 13$ ✓

Or : $13 \nmid 15$

Donc l'équation ne possède pas de solutions ✓

(b): $198x + 216y = 36$

• Calcul de $198 \wedge 216$:

$216 = 198 \times 1 + 18$

$198 = 18 \times 11 + 0$

Ainsi : $198 \wedge 216 = 18$ ✓

Or : $18 \times 2 = 36$ i.e. $18 \mid 36$ ✓

L'équation possède des solution.

• Calcul des solution particulières :

$18 = 216 - 198$

$36 = 2 \times 216 - 2 \times 198$ ✓

Donc : $(x_0, y_0) = (2; -2)$ est une solution particulière.

On a :

$$\begin{cases} (L_1) : 198x + 216y = 36 \\ (L_2) : 198x_0 + 216y_0 = 36 \end{cases}$$

On fait $(L_1)-(L_2)$: C'est plutôt que $(E) \Leftrightarrow 198x+216y = 198x_0+216y_0$

$$198x+216y-198x_0-216y_0=0$$

$$\Leftrightarrow 198(x-x_0)+216(y-y_0)=0$$

$$\Leftrightarrow 198(x-x_0)=-216(y-y_0)$$

$$\Leftrightarrow 198(x-2)=-216(y+2)$$

$\times\frac{1}{18}$ $\quad$ $\times\frac{1}{18}$

$$\Leftrightarrow 11(x-2)=-12(y+2)$$

• Comme : $11 \mid -12(y+2)$ et $11\wedge -12=1$ ✓

D'après le thm de Gauss : $\exists k\in\mathbb{Z} \,/\, y+2=11k$ ✓

• Comme : $12 \mid 11(x-2)$ et $11\wedge 12=1$ ← Inutile car

D'après le thm de Gauss : $\exists k\in\mathbb{Z} \,/\, x-2=-12k$

et en plus, c'est le même k puisqu'on veut

Ainsi :

$\exists k\in\mathbb{Z} \,/\, (x,y)=(2-12k\,;-2+11k)$

$$11(x-2)=-12(y+2)$$
$$=-12\times 11k$$
obligatoirement $x-2=-12k$

(c) : $323x-391y=612$

Calcul de : $323\wedge 391$:

$391=323\times 1+68$

$323=68\times 4+51$

$68=51\times 1+17$

$51=17\times 3+0$

Donc $323\wedge 391=17$

On : $612=17\times 30+102$

$612=17\times 36$ $\quad$ i.e. $17\mid 612$ ✓

L'équation admet des solutions

$17=68-51$

$17=68-(323-68\times 4)=5\times 68$ ✓ -323 ✓

$17=5\times(391-323)-323$

$17=5\times 391-6\times 323$ $\quad$ $\times 36$

$612=-216\times 323+\cancel{5}\times 180$

391

Donc $(x_0, y_0) = (-216 \,;\, 180)$

$(E) \Leftrightarrow 323x - 391y - 323x_0 + 391y_0 = 0$

$\Leftrightarrow 323(x - x_0) + 391(-y + y_0) = 0$

$\Leftrightarrow 323(x - x_0) = -391(-y + y_0)$

$\cancel{17}$

$\Leftrightarrow 19(x - x_0) = -\overset{23}{\cancel{17}}(-y + y_0)$

$\Leftrightarrow 19(\underbrace{x + 216}_{=-23k}) = -\overset{23}{\cancel{17}}(\underbrace{-y + 180}_{=19k})$

~~Or on remarque :~~

~~$19 = 17 \times 1 + 2$~~ ~~Donc : $19 \wedge 17 = 1$~~

~~$17 = 2 \times 8 + 1$~~ Or on a $19 \wedge 23 = 1$.

~~$8 = 1 \times 8 + 0$~~

et comme : $19 \mid -\overset{23}{\cancel{17}}(-y + 180)$ et $-17 \mid 19(x + 216)$

On a d'après le thm de Gauss :

$\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, (x, y) = (-\underset{23}{\cancel{17}}k - 216 \,;\, 19k + 180)$

$\mathcal{S} = \{(-216, 180) + k(-23, -19) ; k \in \mathbb{Z}\}$.