RAJOËL / MINATCHY / THIA
Mathieu / Charlotte / Charles

Séance de TD
du 24/02/2026

24/02/2026
MPSI

Exercice 2

On considère trois entiers consécutifs : $k-1$; k ; $k+1$
Mq $(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3$ est divisible par 9.

On calcule chaque terme :

$(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$ ✓
$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ ✓

donc $(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1$
$= 3k^3 + 6k$ ✓
$= 3k(k^2+2)$ ✓

Mq $9 \mid (3k(k^2+2))$

Comme $9 = 3 \times 3$, on cherche (à montrer que) $3 \mid (k(k^2+2))$

On a 3 cas :

Cas ① : k est multiple de 3

alors $3 \mid k$ donc $3 \mid (k(k^2+2))$ ✓

Cas ②: $k \equiv 1 [3]$

alors $k^2 \equiv 1 [3]$
donc $k^2 + 2 \equiv 1+2 [3] \equiv 0 [3]$
donc $3 \mid k^2+2$
donc $3 \mid k(k^2+2)$

Cas ③: $k \equiv 2 [3]$

alors $k^2 \equiv 1 [3]$
donc $k^2+2 \equiv 3 [3] \equiv 0 [3]$
donc $3 \mid k^2+2$
donc $3 \mid (k(k^2+2))$

dans tous les cas, $3 \mid k(k^2+2)$

Conclusion: La somme des cubes de trois entiers consécutifs est divisible par 9. $\boxtimes$

Exercice 3

Mq $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, avec $p \wedge q = 1$
Par l'absurde, on suppose $\frac{p}{q}$ solution de l'équation.

On a donc $\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{q}\right) + 1 = 0$

donc $p^3 + qp^2 + 2pq^2 + q^3 = 0$ en multipliant par q^3.

donc $p(p^2 - qp - 2q^2) = q^3$

donc $p \mid q^3$

D'après le thm de Gauss, comme $p \wedge q = 1$, alors $p \mid q^2$.

En utilisant le thm de Gauss une 2e fois, on a $p \mid q$ ce qui est ABSURDE !!

Donc l'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{Q}$.

$\boxed{/}$

En fait, non, si $p \wedge q = 1$ et $p \mid q$ alors $p = 1$ ou -1
En faisant un raisonnement similaire on obtient
$q \mid p^3$ donc $q \mid p$ puis $q = \pm 1$
et il ne reste plus que 2 valeurs possibles
pour $\frac{p}{q}$: ± 1. Il n'y a ensuite plus qu'à
vérifier que ni l'une ni l'autre n'est solution
de l'équation.