T.D 18

ex 18 (Théorème chinois)

$$(S) \begin{cases} x \equiv a_1 \ [N_1] \\ x \equiv a_2 \ [N_2] \end{cases} \iff \left(\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = a_1 + kN_1 \\ \text{et de plus } kN_1 + a_1 \equiv a_2 [N_2] \end{array} \right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} / x = a_1 + kN_1 \\ \text{et de plus } kN_1 \equiv (a_2 - a_1)[N_2] \end{array} \right)$$

Comme $N_1 \wedge N_2 = 1$, N_1 est inversible modulo N_2,

donc en notant u un inverse de N_1 modulo N_2, on

a $kN_1 \equiv (a_2 - a_1)[N_2] \iff k \equiv (a_2 - a_1)u \, [N_2]$

$\iff \exists k' \in \mathbb{Z} /$
$k = (a_2 - a_1)u + k'N_2$.

Ainsi $(S) \iff \left(\exists k' \in \mathbb{Z} / x = a_1 + \left((a_2 - a_1)u + k'N_2 \right) N_1 \right)$

$\iff \exists k' \in \mathbb{Z} / x = \underbrace{a_1 + (a_2 - a_1)uN_1}_{\text{On définit } a :=} + k'N_1N_2$

$\iff \exists k' \in \mathbb{Z} / x = a + k'N_1N_2$

$\iff x \equiv a \, [N_1N_2]$

2) $\begin{cases} x \equiv 2 \ [10] \\ x \equiv 5 \ [13] \end{cases} \Leftrightarrow \left(x = 10k+2 \text{ avec } 10k+2 \equiv 5 \ [13] \right)$

$\Leftrightarrow \left(x = 10k+2 \text{ avec } 10k \equiv 3 \ [13] \right).$

Cherchons un inverse de 10 modulo 13 (possible car $10 \wedge 13 = 1$)

en remarquant que $10 \times 4 = 40 \equiv 1 \ [13]$ on voit que

$$10 \times 4 \equiv 1 \ [13]$$

Ainsi $10k \equiv 3 \ [13] \underset{\text{(en faisant } \times 4)}{\Leftrightarrow} k \equiv 12 \ [13].$

$\equiv -1 \ [13]$

Ainsi, avec $k = -1$ on trouve -8, qui est une solution particulière, puis d'après la Q.1

$$\begin{cases} x \equiv 2 \ [10] \\ x \equiv 5 \ [13] \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv -8 \ [130]$$

---

3) On sait que $\begin{cases} N \equiv 3 \ [17] \\ N \equiv 4 \ [11] \ (\text{car } 17-6=11) \\ N \equiv 5 \ [6] \end{cases}$

Donc $N = 17k+3 \equiv 4 \ [11]$ i.e $17k \equiv 1 \ [11].$

i.e $6k \equiv 1 \ [11]$

On remarque que $2 \times 6 = 12 \equiv 1 \ [11]$

donc on a $k \equiv 2 \ [11].$

Ainsi $N \equiv 17 \times 2 + 3 \ [17 \times 11] \equiv 37 \ [187].$

On a donc $N = \underbrace{187\ell + 37}_{\equiv\, \ell + 37\ [6]\ \equiv\ \ell + 1\ [6]} \equiv 5\ [6]$

donc $\ell \equiv 4\ [6]$

prenons $\ell = 4$.

$N = 4 \times 187 + 37 = 785$ est une solution.

et d'après la Q.1 on a

$$\begin{cases} N \equiv 3\ [17] \\ N \equiv 4\ [11] \\ N \equiv 5\ [6] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} N \equiv 37\ [187] \\ N \equiv 5\ [6] \end{cases} \Longleftrightarrow N \equiv 785\ [935]$$

Les solutions sont donc tous les entiers de la forme $785 + k \times 935$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

la plus petite solution positive (un butin est souvent positif !) est donc 785