$\boxed{\text{Ex } 14}$ $\boxed{1}$ $v_2(1000!) = v_2(1000!) = v_2\left(\prod_{k=1}^{1000} k\right)$

$$= \sum_{k=1}^{1000} v_2(k)$$

Entre 1 et 1000 il y a :

- 500 multiples de 2 ($500 = \lfloor \frac{1000}{2} \rfloor$)
- 250 multiples de 4 ($250 = \lfloor \frac{1000}{4} \rfloor$)
- 125 multiples de 8 ($125 = \lfloor \frac{1000}{8} \rfloor$)
- 62 multiples de 16 ($62 = \lfloor \frac{1000}{16} \rfloor$)

etc

Nombre d'entiers dont la valuation 2-adique vaut k : nb. multiples de 2^k − nb. de multiples de 2^{k+1}

$$= \left\lfloor \frac{1000}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{2^{k+1}} \right\rfloor$$

$$\boxed{v_2(1000!)} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \times \mathrm{Card}(\{n \in [\![1, 1000]\!] / v_2(n) = k\})$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k \times \left(\left\lfloor \frac{1000}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{2^{k+1}} \right\rfloor \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\underbrace{k \left\lfloor \frac{1000}{2^k} \right\rfloor}_{:= U_k} - \underbrace{(k+1) \left\lfloor \frac{1000}{2^{k+1}} \right\rfloor}_{:= U_{k+1}} + \left\lfloor \frac{1000}{2^{k+1}} \right\rfloor \right)$$

$$= -\sum_{k=0}^{+\infty} (U_{k+1} - U_k) + \sum_{k=0}^{+\infty} \left\lfloor \frac{1000}{2^{k+1}} \right\rfloor$$

Rem : $\left\lfloor \frac{1000}{2^k} \right\rfloor$ est nulle dès que $2^k \geq 1000$ donc (U_k) est nulle APCR.

$$v_2(1000!) = \underbrace{\lim U_n}_{=0} \underbrace{-U_0}_{=0} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left\lfloor \frac{1000}{2^{k+1}} \right\rfloor \underset{\substack{\text{Chgt} \\ \text{d'indice} \\ l = k+1}}{=} \sum_{l=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{1000}{2^l} \right\rfloor$$

2] Même argument avec p au lieu de 2 et n au lieu de 1000.

3] On a $v_2(2024) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lfloor \frac{2024}{2^k} \rfloor$

$$v_5(2024) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lfloor \frac{2024}{5^k} \rfloor$$

L'exposant sur 5 est inférieur à celui sur 2

car $\frac{2024}{5^k} \leq \frac{2024}{2^k}$

Ainsi, la plus grande puissance de 10 qui divise

$2024!$ est $v_5(2024!)$ i.e $\sum_{k=0}^{+\infty} \lfloor \frac{2024}{5^k} \rfloor$

$$= \lfloor \frac{2024}{5} \rfloor + \lfloor \frac{2024}{25} \rfloor + \lfloor \frac{2024}{125} \rfloor + \lfloor \frac{2024}{625} \rfloor$$

$$= 404 + 80 + 16 + 3 = 503.$$

Il y a donc 503 chiffres 0 à la fin

du nombre $2024!$