Ex 1 Montrons que $\forall n \geq 2, 10 | (2^{2^n} - 6)$

On sait que si $a \wedge b = 1$, $a | c$ et $b | c$ alors $ab | c$

Comme $2 | 2^{2^n} - 6$ cela valide une des condit.

On veut montrer que c'est aussi le cas pour 5

Pour $2 \wedge 5 = 1$, $5 | (2^{2^n} - 1)$

$-6 \equiv 1 [5]$ étant vrai.

On veut montrer que

$\mathcal{P}(n)$: " $2^{2^n} \equiv 1 [5]$ "

$\boxed{\text{Initialisation}}$ pour $n = 2$

$16 \equiv 1 [5]$ ce qui prouve $\mathcal{P}(2)$ car $16 = 2^{\left(2^2\right)}$.

$\boxed{\text{Hérédité}}$ Soit $n \geq 2$, on suppose $\cancel{\mathcal{P}(2)}$ $\mathcal{P}(n)$

Comme on a supposé $\mathcal{P}(n)$

On a la propriété selon laquelle :

" Si $a \equiv b [n]$ "

alors en les mettant à la puissance m, elle reste congrue

D'où $(2^{2^n})^2 \equiv (1)^2 [5]$

Ce qui donne $2^{2^{n+1}} \equiv 1 [5]$ ✓

Ce qui prouve prouve $P(n+1)$

Alors comme $2 | (2^{2^n} - 6)$ et $5 | (2^{2^n} - 6)$

d'après la propriété : ($a \wedge b = 1$, $a | c$ et $b | c \Rightarrow ab | c$) on a $2 \times 5 | (2^{2^n} - 6)$

Donc $\forall n > 2, 10 | (2^{2^n} - 6)$

$\boxtimes$