Colle 23 : Fractions rationnelles-analyse asymptotique

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ Sans démonstration

Si $F \in \mathbb{R}(X)$, on a $Q = \prod_{k=1}^{q}(X-\alpha_k)^{m_k}\prod_{k=1}^{r}(X^2+\beta_k X+\gamma_k)^{n_k}$ où les α_k sont les pôles réels de F d'ordre m_k et $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$. Alors il existe un unique polynôme E et une unique famille de complexes $(b_{kj})_{1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m_k}$ telle que

$$F = E + \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{a_{kj}}{(X-\alpha_k)^j} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{b_{kj}X+c_{kj}}{(X^2+\beta_k X+\gamma_k)^j}.$$

Définition 1 Notation o et O

Donner les définitions de $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$. Montrer que la deuxième proposition implique la première et donner un exemple où la première est vérifiée mais pas la deuxième.

Proposition 2 Conséquences (Opérations sur o)

- **Transitivité** : Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$
- **Somme** : Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $\lambda f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- **Produit** : Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g_2(x))$ alors $f_1(x)\times f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x)\times g_2(x))$.
- **Quotient** : Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et h non nulle au voisinage de a alors $f(x)/h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)/h(x))$

Proposition 3 Théorème (croissances comparées en $+\infty$)

- $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta) \Longleftrightarrow \alpha < \beta$
- $e^{ax} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{bx}) \Longleftrightarrow a < b$
- Soient $a > 1, \alpha > 0, \beta > 0$

$$\ln^\beta(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{ax})$$

Proposition 4 Unicité d'un développement limité

Soit f une fonction définie sur I un intervalle et $x_0 \in I$.
Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 alors il est unique.

Proposition 5 DL d'une primitive

Si f est dérivable en x_0 et f' admet un DL en x_0 à l'ordre n, alors f admet un DL en x_0 à l'ordre $n+1$ obtenu en intégrant celui de f'.

Autrement dit, si $f'(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$ alors

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} + o((x-x_0)^{n+1}).$$

Proposition 6 Formule de Taylor-Young

Soit f définie sur I un intervalle et $x_0 \in I$.
Si f est de classe C^n sur I alors f admet un unique développement limité à l'ordre n en x_0 :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

Proposition 7 DL

Connaître les DL de exp, cos, ch, sin et sinh à un ordre quelconque en 0, avec justification.

À savoir faire

- ☐ Tous les exercices sur les fractions rationnelles (commencer par un exercice sur les fractions rationnelles)
- ☐ Additionner des DL (si un terme $o_{x_0}((x-x_0)^n)$ apparaît, il est inutile de calculer les termes $o_{x_0}((x-x_0)^k)$) pour $k > n$.)
- ☐ Faire des produits de DL
- ☐ Diviser des DL : ramener le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ à un produit $h(x)\frac{1}{1+u(x)}$ où $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$
- ☐ Composer des DL : pour l'exponentielle, $e^{a_0+u(x)} = e^{a_0}e^{u(x)}$ pour se ramener à un DL en 0.
  Pour le logarithme, $\ln(a_0+u(x)) = \ln(a_0(1+\frac{u(x)}{a})) = \ln(a_0) + \ln(1+\frac{u(x)}{a_0})$ pour se ramener à un DL en 1.

Ce qu'en dit le programme

Analyse asymptotique

L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels *et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.*

Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$. Lien entre ces relations.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x)+o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^{\beta}(x)$, x^{α}, $\mathrm{e}^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^{\beta}(x)$, x^{α} en 0.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O. Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.	