# Colle 22 : polynômes-fractions rationnelles

## Résultats et preuves à connaître

**Proposition 1** Formules de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(X-\alpha)^k}{k!} P^{(k)}(\alpha) \quad \text{et} \quad P(X+\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^k}{k!} P^{(k)}(\alpha).$$

**Proposition 2** Caractérisation 2 de la multiplicité d'une racine

On pourra utiliser sans démonstration la caractérisation 1 vue la semaine 21$\alpha$ est une racine d'ordre $k$ de $P$ ssi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

**Proposition 3** Décomposition sur $\mathbb{C}$

Tout polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{q} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

où $\alpha_1, \dots \alpha_q$ sont les racines distinctes de $P$ respectivement d'ordre $m_1, m_2, \dots m_q$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est le coefficient dominant de $P$.

**Proposition 4** Racines conjuguées et multiplicités

- $P \in \mathbb{R}[X] \iff \overline{P} = P$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$P(z) = 0 \iff P(\bar{z}) = 0.$$

$z$ est racine d'ordre $k$ de $P$ ssi $\bar{z}$ est racine d'ordre $k$ de $P$.

**Proposition 5** Décomposition sur $\mathbb{R}$

Tout polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{q} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{r} (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{n_k}$$

où $\alpha_1, \dots \alpha_q$ sont les racines réelles distinctes de $P$ respectivement d'ordre $m_1, m_2, \dots m_q$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est le coefficient dominant de $P$, et $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$.

**Proposition 6** Relations coefficients-racines

Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme complexe de degré $n$ ayant pour racines $\alpha_1,\dots\alpha_n$.
On pose $\forall k \in [\![ 1,n ]\!]$, $\sigma_k = \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n} \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_k}$. Alors

$$P=a_n(X^n-\sigma_1 X^{n-1}+\sigma_2 X^{n-2}+\dots+(-1)^n\sigma_n) \quad \text{et} \quad \sigma_k=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

**Proposition 7** Polynômes de Lagrange

Rappeler la définition de $L_i$ puis vérifier que $\deg(L_i)=n-1$ et $\forall (i,j)\in [\![ 1,n ]\!]^2$, $L_i(x_j)=\delta_{ij}$ i.e. $L_i$ admet $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ comme racines et vaut 1 en $x_i$.

**Proposition 8** Interpolation de Lagrange de degré minimal

On peut utiliser sans démonstration le résultat précédent Si $x_1,\dots,x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1,\dots,y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ alors il existe un unique $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie

$$\forall i \in [\![ 1,n ]\!],\ P(x_i)=y_i$$

Il s'agit de $P=\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$.

**Proposition 9** Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ Sans démonstration

Si $F\in\mathbb{C}(X)$, on a $Q=\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)^{m_k}$ où les $\alpha_k$ sont les pôles de $F$ d'ordre $m_k$. Alors il existe un unique polynôme $E$ et une unique famille de complexes $(b_{kj})_{1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m_k}$ telle que

$$F=E+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{b_{kj}}{(X-\alpha_k)^j}.$$

**Proposition 10** Pôle simple

Soit $a$ un pôle simple de $F$.
La partie polaire relative à $a$ est $\frac{\alpha}{X-a}$ où $\alpha=[(X-a)F](a)$.

**Proposition 11** Dérivation la tête en bas

Soit $a$ un pôle simple de $F=\frac{P}{Q}$.
La partie polaire relative à $a$ est $\frac{\alpha}{X-a}$ où $\alpha=\frac{P(a)}{Q'(a)}$.

**Exercice 1** Décomposer en élément simples

Donner la décomposition en éléments simple de $\frac{1}{X^4+X^2+1}$

# À savoir faire

- ☐ Tous les exercices sur les polynômes
- ☐ Décomposer une fraction en éléments simples :
- ☐ Commencer par diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD s'ils ne sont pas premiers entre eux. Faire la division euclidienne de $P$ par $Q$ pour identifier parties entières et polaires.
- ☐ Déterminer les pôles et leurs ordres.
- ☐ Donner la forme de la décomposition en éléments simples en laissant des coefficients indéterminés.
- ☐ Réduire le nombre de coefficients en exploitant les propriétés remarquables (parité, effet de la conjugaison, limite de $xF(x)$ en $+\infty$...).
- ☐ Appliquer la méthode de multiplication-évaluation (de préférence si $Q$ est sous forme factorisée) ou la méthode "$P(a)/Q'(a)$" dite " de dérivation la tête en bas" s'il s'agit d'un pôle simple et que $Q$ n'est pas sous forme factorisée.

# Ce qu'en dit le programme

## Polynômes et fractions rationnelles

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$** | |
| Semaine précédente | |
| **g) Formule d'interpolation de Lagrange** | |
| Si $x_1,\dots,x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1,\dots,y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i$. | Expression de $P$.<br>Description des polynômes $Q$ tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout $i$. |
| **h) Fractions rationnelles** | |
| Corps $\mathbb{K}(X)$.<br>Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.<br>Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités. | La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme. |
| **i) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$** | |
| Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.<br><br>Si $\lambda$ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$. | La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue.<br>Application au calcul de primitives, de dérivées $k$-ièmes. |

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$. | |