DS n°7.

Durée : 4 heures

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Questions indépendantes

1. (a) Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $P(-1)=1$, $P(0)=-1$ et $P(1)=-1$. Ce polynôme est -il unique?
   (b) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(-1)=1$, $P(0)=-1$ et $P(1)=-1$.
2. Montrer que les polynômes $P(X)=2X^4+X^3-X^2+2X-1$ et $Q(X)=4X^3+4X^2-X-1$ ont une racine commune que l'on déterminera
3. Décomposer en éléments simples (dans $\mathbb{R}(X)$) et $\mathbb{C}(X)$) la fraction rationnelle : $\frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
4. Décomposer en éléments simples (dans $\mathbb{R}(X)$) et $\mathbb{C}(X)$) la fraction rationnelle : $\frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2}$
5. Déterminer $v_2(2026)$ et $v_3(2026)$.
6. Résoudre le système suivant $\begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+yz+xz=-13 \\ xyz=-15 \end{cases}$
7. Démontrer que 13 divise $3^{126}+5^{126}$.
8. Trouver toutes les solutions entières de l'équation
$$974x+86y=12.$$

Exercice 1

1. Etude d'un exemple
   (a) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de X^8-1 par X^3-1 et par X^2-1.
   (b) Calculer $(X^8-1)\wedge(X^3-1)$ et $(X^8-1)\wedge(X^2-1)$.
2. Cas général : Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geqslant p > 0$.
   (a) Notons q et r les quotient et reste de la division euclidienne de n par p. Déterminer les quotient et reste de la division euclidienne de X^n-1 par X^p-1. On vérifiera que le reste est X^r-1.
   (b) En déduire que
$$X^p-1 \text{ divise } X^n-1 \Longleftrightarrow p \text{ divise } n$$
   (c) On pose r_k le reste à l'étape k dans l'algorithme d'Euclide pour la recherche du pgcd de n et p : on a donc $r_1=r$. Montrer que $(X^n-1)\wedge(X^p-1)=(X^{r_k}-1)\wedge(X^{r_{k+1}}-1)$.
   (d) En déduire que
$$(X^n-1)\wedge(X^p-1)=X^{n\wedge p}-1$$

Exercice 2

On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'entier $\Delta_n = \operatorname{ppcm}(1,2,\ldots,n)$. Dans tout l'exercice la lettre p désignera toujours un nombre premier (y compris dans les produits où elle apparaît en indice : le produit ne sera donc réalisé que sur les nombres premiers)

1. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

   (a) Soit $p \in \mathscr{P}$, montrer que $p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n$.

   (b) Montrer que $\Delta_n = \prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)}$.

   (c) En déduire que $\Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}$.

2. On cherche dans cette question à majorer simplement le produit $\prod_{p \leqslant n} p$ en fonction de l'entier $n \geqslant 1$.

   (a) Soient a et b deux entiers tels que $0 < \dfrac{b}{2} \leqslant a < b$. Montrer que le produit $\prod_{a < p \leqslant b} p$ divise l'entier $\dbinom{b}{a}$.

   (b) En déduire que pour tout $m \geqslant 1$, le produit $\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p$ divise l'entier $\dbinom{2m+1}{m+1}$.

   (c) Comparer, pour $m \geqslant 1$, les entiers $\dbinom{2m+1}{m}$ et $\dbinom{2m+1}{m+1}$.

   (d) En déduire que pour tout entier $m \geqslant 1$, $\dbinom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$ en développant $(1+1)^{2m+1}$.

   (e) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m$.

   (f) Prouver finalement que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n$.

   On pourra montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![1, 2n]\!], \prod_{p \leqslant k} p \leqslant 4^k$.

Problème

Soit (S_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n par

$$P_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right]$$

1. (a) Montrer que P_n est un polynôme à coefficients entiers. Quelle est sa parité ?
   (b) Préciser son degré et son coefficient dominant.
   (c) Montrer que les racines de P_n sont :

$$x_k = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \quad \text{avec} \quad k \in [\![-n, n]\!] \setminus \{0\}$$

Remarque La fonction cotangente est la fonction $\operatorname{cotan} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\tan(x)}. \end{cases}$

2. On note Q_n le polynôme défini par $P_n = Q_n(X^2)$.
   (a) Déterminer les racines de Q_n et en déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Préciser les deux termes non nuls de plus hauts degrés de sa forme développée.
   (c) En déduire les sommes suivantes

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \quad \text{et} \quad \tau_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

3. Montrer que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{cotan}^2(x) < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2(x)}$

4. En déduire la limite de la suite (S_n).