Correction du DS n°7.

Durée : 4 heures

Questions indépendantes

1. (a) Considérons les polynômes de Lagrange L_{-1}, L_0 et L_1 associés au triplet $(-1,0,1)$. Ils sont donnés par $L_{-1}(X) = \frac{X(X-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{X^2-X}{2}$,
$L_0(X) = \frac{(X+1)(X-1)}{(0+1)(0-1)} = -(X^2-1)$,
$L_1(X) = \frac{(X+1)X}{(1+1)1} = \frac{X^2+X}{2}$.
Alors un polynôme qui convient est le polynôme $P_0(X) = 1L_{-1}(X) - 1L_0(X) - 1L_1(X) = X^2 - X - 1$.
C'est le seul qui convient, car si P est un polynôme de degré (inférieur ou égal à) 2 qui convient, alors $P - P_0$ est de degré au plus 2 et admet au moins 3 racines : c'est donc le polynôme nul.

   (b) Soit P un tel polynôme. Alors, utilisant le polynôme P_0 introduit à la question précédente, et posant $Q = P - P_0$, on a $Q(-1) = Q(0) = Q(1) = 0$. Autrement dit, Q est divisible par $(X+1)X(X-1) = X^3 - X$, et P s'écrit $P(X) = X^2 - X - 1 + A(X)(X^3 - X)$
avec $A \in \mathbb{R}[X]$. Réciproquement, tous les polynômes de cette forme conviennent.

2. On va calculer leur pgcd. En effectuant les divisions euclidiennes successives, on a $P(X) = Q(X)\left(\frac{X}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{X^2}{2} + \frac{9X}{4} - \frac{5}{4}$,
$Q(X) = (2X^2 + 9X - 5)(2X - 7) + 36(2X - 1)$
et enfin $2X^2 + 9X - 5 = (2X - 1)(X + 5)$.
Le pgcd de P et Q est donc le dernier reste non nul, c'est-à-dire $2X - 1$. Ainsi, $2X - 1$ divise P et Q et $1/2$ est une racine commune à P et Q .

3. Une division euclidienne permet de trouver la partie entière qui est le polynôme constant égal à 1. La fraction était irréductible : 0 est son seul zéro et 1,2 et 3 sont les 3 pôles simples. Ainsi il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)} = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}$. La méthode de multiplication évaluation donne $a = \frac{1}{2}$, $b = 8$ et $c = \frac{27}{2}$
ainsi $\frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)} = 1 + \frac{1}{2(X-1)} - \frac{8}{X-2} + \frac{27}{2(X-3)}$.

4. Le dénominateur se factorise en $(X^2-1)^2 = (X-1)^2(X+1)^2$. Il faut donc étudier la partie polaire relative à +1 et à -1. Commençons par étudier la partie polaire relative à -1 . Elle s'écrit sous la forme $\frac{2X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{\lambda_1}{X+1} + \frac{\lambda_2}{(X+1)^2} + G(X)$,
où G est une fraction rationnelle dont -1 n'est pas un pôle. Multipliant cette égalité par $(X+1)^2$ et faisant $X = -1$, on trouve $\lambda_2 = 3/4$. On calcule ensuite $\frac{2X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2} - \frac{3/4}{(X+1)^2} = \frac{(5X+1)/4}{(X+1)(X-1)^2} = \frac{\lambda_1}{X+1} + G(X)$.
On multiplie cette fois par $X+1$, et on fait $X = -1$, et on trouve $\lambda_1 = -1/4$. Pour étudier la partie polaire relative à 1 , on peut procéder de la même façon ou simplement remarquer que la fraction rationnelle est paire. On en déduit que $\frac{2X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{-1/4}{X+1} + \frac{3/4}{(X+1)^2} + \frac{1/4}{X-1} + \frac{3/4}{(X-1)^2}$.

5. $2026 = 2 \times 1013$ qui est impair donc $v_2(2026) = 1$. $2+0+2+6 = 10$ n'est pas multiple de 3 donc 2026 non plus, ainsi $v_3(2026) = 0$

6. On sait que x, y et z sont (dans un ordre quelconque) les racines du polynôme $X^3 - 3X^2 - 13X + 15$. on remarque que 1 en est une racine évidente $X^3 - 3X^2 - 13X + 15 = (X-1)(X^2 - 2X - 15)$ puis $\Delta = 4 + 60 = 8^2$ les deux autres racines sont donc $\frac{2 \pm 8}{2}$ i.e. 5 et -3. Donc (x,y,z) est solution si et seulement si x, y, z valent $-3; 1$ et 5 dans un ordre quelconque.

7. On va commencer par étudier les puissances de 3 modulo 13 . On commence par remarquer que $3^1 \equiv 3\ [13]$, $\quad 3^2 \equiv 9\ [13]$, $3^3 \equiv 1\ [13]$.
On sait donc que, puisque $126 = 3 * 42$, $3^{126} \equiv (3^3)^{42}\ [13]$, et donc $3^{126} \equiv 1\ [13]$. De même, on a $5^1 \equiv 5\ [13]$, $\quad 5^2 \equiv 12\ [13]$, $\quad 5^3 \equiv 8\ [13]$, $\quad 5^4 \equiv 1 [13]$.

Par un raisonnement similaire, et utilisant que $126 = 31 * 4 + 2$, on trouve $5^{126} \equiv 5^2$ [13] soit $5^{126} \equiv 12$ [13].

On en déduit que $3^{126} + 5^{126} \equiv 0$ [13],

ce qui signifie bien que 13 divise $3^{126} + 5^{126}$.

8. On remarque que 974 et 86 sont pairs donc cette équation se ramène à $487x + 43y = 6$. on applique l'algorithme d'Euclide
$487 = 43 \times 11 + 14$ et donc $14 = 487 - 43 \times 11$
$43 = 14 \times 3 + 1$ et donc $1 = 43 - 3 \times 14 = 43 - 3(487 - 43 \times 11) = 43(1 + 33) - 3 \times 487 = 487 \times (-3) + 43 \times 34$
Ainsi $(-3; 34)$ est une solution de $487x + 43y = 1$ en multipliant par 6 on a $(-18, 204)$ est une solution particulière de notre équation.
$487x+43y = 6 \Leftrightarrow 487x+43y = 487 \times (-18)+43 \times 204 \Leftrightarrow 487(x+18) = 43(-y+204)$ Comme 487 et 43 sont prmeiers entre eux (prouvé par l'algorithme d'euclide) une telle égalité n'est possible que si 43 divise $x + 18$, dans ce cas il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x + 18 = 43k \\ -y + 204 = 487k \end{cases}$ (et c'est en fait une équivalence). L'ensemble des solutions est donc l'ensemble de tous les couples de la forme $(-18 + 43k; 204 - 487k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ ou plus formellement $\mathcal{S} = (-18; 204) + \mathbb{Z}(43; -487)$.

Exercice 1

1. (a) • $X^8 - 1 = (X^4 - 1)(X^4 + 1) = (X^2 - 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1)$ donc le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^8 - 1$ par $X^2 - 1$ sont respectivement $(X^2 + 1)(X^4 + 1) = X^6 + X^4 + X^2 + 1$ et 0 car $X^2 - 1$ divise $X^8 - 1$.
• En divisant à la main $X^8 - 1$ par $X^3 - 1$, on obtient $X^8 - 1 = (X^3 - 1)(X^5 + X^2) + (X^2 - 1)$ donc le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^8 - 1$ par $X^3 - 1$ sont respectivement $X^5 + X^2$ et $X^2 - 1$.

(b) Comme $X^2 - 1$ divise $X^8 - 1$, on a $\boxed{(X^8 - 1) \wedge (X^2 - 1) = X^2 - 1}$.
D'après l'algorithme d'Euclide, on a :
$X^8 - 1 = (X^3 - 1)(X^5 + X^2) + (X^2 - 1)$
$X^3 - 1 = (X^2 - 1)X + (X - 1)$
$X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1) + 0$ donc $\boxed{(X^8 - 1) \wedge (X^3 - 1) = X - 1}$.

2. (a) Si q et r sont les quotient et reste de la division euclidienne de n par p alors $n = pq + r$ avec $0 \leqslant r < p$.
$X^n - 1 = (X^p - 1)X^{n-p} + (X^{n-p} - 1)$
$X^{n-p} - 1 = (X^p - 1)X^{n-2p} + (X^{n-2p} - 1)$
d'où pour tout $k \in [\![0, q - 1]\!]$, $X^{n-kp} - 1 = (X^p - 1)X^{n-(k+1)p} + (X^{n-(k+1)p} - 1)$
Finalement, $X^{n-p(q-1)} - 1 = (X^p - 1)X^{n-pq} + (X^{n-pq} - 1) = (X^p - 1)X^r + (X^r - 1)$
Soit, en reportant, $X^n - 1 = (X^p - 1)(X^{n-p} + X^{n-2p} + \cdots + X^r) + (X^r - 1)$
On a bien $\deg(X^r - 1) = r < \deg(X^p - 1)$. Par unicité, les quotient et reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$ sont $X^{n-p} + X^{n-2p} + \cdots + X^r$ et $X^r - 1$.

(b) $X^p - 1$ divise $X^n - 1 \Longleftrightarrow X^r - 1 = 0 \Longleftrightarrow r = 0 \Longleftrightarrow p$ divise n

(c) • En effectuant l'algorithme d'Euclide sur n et p, on obtient que :
à l'étape 1, le reste de la division de n par p est $r = r_1$ avec $0 \leqslant r_1 < p$.
à l'étape 2, le reste de la division de p par $r = r_1$ est r_2 avec $0 \leqslant r_2 < r_1$.
$\ldots$ à l'étape k, le reste de la division de r_{k-2} par r_{k-1} est r_k avec $0 \leqslant r_k < r_{k-1}$.
• On en déduit qu'en effectuant l'algorithme d'Euclide sur $(X^n - 1)$ et $(X^p - 1)$, on obtient que :
à l'étape 1, le reste de la division de $(X^n - 1)$ par $(X^p - 1)$ est $X^r - 1 = X^{r_1} - 1$.
à l'étape 2, le reste de la division de $(X^p - 1)$ par $(X^r - 1)$ est $X^{r_2} - 1$.
$\ldots$ à l'étape k, le reste de la division de $(X^{r_{k-2}} - 1)$ par $(X^{r_{k-1}} - 1)$ est $X^{r_k} - 1$.
De plus, d'après l'algorithme d'Euclide,
$(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = (X^p - 1) \wedge (X^{r_1} - 1) = (X^{r_1} - 1) \wedge (X^{r_2} - 1) = \cdots = (X^{r_k} - 1) \wedge (X^{r_{k+1}} - 1)$.

(d) D'après l'algorithme d'Euclide sur n et p, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $r_{N+1} = 0$; On a alors $r_N = n \wedge p$.
On en déduit donc que $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = (X^{r_N} - 1) \wedge (X^{r_{N+1}} - 1) = (X^{n \wedge p} - 1) \wedge (0)$.
On obtient finalement que $\boxed{(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^{n \wedge p} - 1}$

Exercice 2

(a) Par définition du ppcm, $\boxed{v_p(\Delta_n) = \max(v_p(1), \ldots, v_p(n))}$ donc il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $v_p(\Delta_n) = v_p(k)$ et par définition de $v_p(k)$ on a $p^{v_p(k)} \mid n$, d'où $\boxed{p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n}$.

(b) Par définition de la décomposition en produit de facteurs premiers, on a $\Delta_n = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{v_p(\Delta_n)}$.

De plus, d'après 5 (a), $p \leqslant p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n$ donc $\boxed{\Delta_n = \prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)}}$.

(c) On obtient alors $\Delta_n = \prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant \prod_{p \leqslant n} n = n^{\operatorname{card}\{p \leqslant n\}}$ soit $\boxed{\Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}}$.

3. $\forall n \geqslant 7, \Delta_n \geqslant 2^n$ d'où $2^n \leqslant n^{\pi(n)}$ soit $n\ln(2) \leqslant \pi(n)\ln(n)$ soit $\boxed{\forall n \geqslant 7, \pi(n) \geqslant \ln(2)\dfrac{n}{\ln(n)}}$.

I. Une majoration de $\pi(n)$.

1. (a) $\prod_{p \in \mathscr{P} \mid a < p \leqslant b} p$ divise $\prod_{k \in \mathbb{N} \mid a < k \leqslant b} k = \dfrac{b!}{a!} = (b-a)!\dbinom{b}{a}$.

Comme $0 < \dfrac{b}{2} \leqslant a < b$, on a $a < b \leqslant 2a$ soit $0 < b - a \leqslant a$ donc $\forall (p,k) \in \mathscr{P} \cap [\![a+1, b]\!] \times [\![1, b-a]\!]$, $p \wedge k = 1$ d'où $p \wedge (b-a)! = 1$ et donc $\left(\prod_{a < p \leqslant b} p\right) \wedge (b-a)! = 1$.

D'après le théorème de Gauss, $\boxed{\prod_{a < p \leqslant b} p \text{ divise } \dbinom{b}{a}}$.

(b) On applique la relation précédente à $a = m+1$ et $b = 2m+1$. En effet $\dfrac{b}{2} = m + \dfrac{1}{2}$ donc $0 < \dfrac{b}{2} \leqslant a < b$.

d'où $\boxed{\forall m \geqslant 1, \prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p \text{ divise } \dbinom{2m+1}{m+1}}$.

(c) $\forall m \geqslant 1$, $\boxed{\dbinom{2m+1}{m} = \dbinom{2m+1}{2m+1-m} = \dbinom{2m+1}{m+1}}$.

(d) $\forall m \geqslant 1$, $(1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \dbinom{2m+1}{k} \geqslant \dbinom{2m+1}{m+1} + \dbinom{2m+1}{m}$ soit $2 \times 4^m \geqslant 2\dbinom{2m+1}{m}$

d'où $\boxed{\dbinom{2m+1}{m} \leqslant 4^m}$.

(e) Comme $\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p$ divise $\dbinom{2m+1}{m+1}$, on a $\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p \leqslant \dbinom{2m+1}{m+1}$

d'où, $\boxed{\forall m \geqslant 1, \prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m}$.

(f) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\forall k \in [\![1, 2n]\!]$, $\prod_{p \leqslant k} p \leqslant 4^k$».

• Pour $n = 1$, $k \in [\![1, 2]\!]$
Si $k = 1$, il n'y a pas de nombre premier $p \leqslant 1$ donc $\prod_{p \leqslant 1} p = \prod_{p \in \varnothing} p = 1$ et $1 \leqslant 4^1$
Si $k = 2$, il n'y a que 2 comme nombre premier $p \leqslant 2$ donc $\prod_{p \leqslant 2} 2 = 2 \leqslant 4^2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, spposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Soit $k \in [\![1, 2n+2]\!]$. Si $k \in [\![1, 2n]\!]$, d'après $\mathcal{P}(n)$, on a $\displaystyle\prod_{p \leqslant k} p \leqslant 4^k$.
Si $k = 2n+1$ alors $\displaystyle\prod_{p \leqslant 2n+1} p = \left(\prod_{p \leqslant n+1} p\right) \times \left(\prod_{n+1 < p \leqslant 2n+1} p\right) \leqslant 4^{n+1} \times 4^n$ donc $\displaystyle\prod_{p \leqslant 2n+1} p \leqslant 4^{2n+1}$.
Si $k = 2n+2 \notin \mathscr{P}$ alors $\displaystyle\prod_{p \leqslant 2n+2} p = \prod_{p \leqslant 2n+1} p$ d'où $\displaystyle\prod_{p \leqslant 2n+2} p \leqslant 4^{2n+1} \leqslant 4^{2n+2}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![1, 2n]\!], \displaystyle\prod_{p \leqslant k} p \leqslant 4^k$ soit $\boxed{\forall m \geqslant 1, \displaystyle\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n}$.

Problème

1. (a) $$P_n = \frac{1}{2i}\left[\sum_{2k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{2k} i^{2k} X^{2n+1-2k} + \sum_{2k+1=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{2k+1} i^{2k+1} X^{2n+1-(2k+1)}\right.$$
$$\left. - \sum_{2k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{2k}(-i)^{2k} X^{2n+1-2k} - \sum_{2k+1=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{2k+1}(-i)^{2k+1} X^{2n+1-(2k+1)}\right]$$
$$= \frac{1}{2i} 2 \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k i X^{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k X^{2(n-k)}$$
On obtient alors que $\boxed{P_n \text{ est un polynôme pair à coefficients entiers}}$

(b) De plus, $\boxed{\deg(P_n) = 2n}$ et le coefficient dominant de P_n est $\displaystyle\binom{2n+1}{1} = \boxed{2n+1}$

(c) $P_n(x) = 0 \iff (x+i)^{2n+1} = (x-i)^{2n+1} \iff \left(\dfrac{x+i}{x-i}\right)^{2n+1} = 1$ car i n'est pas solution
$$\iff \frac{x_k+i}{x_k-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \text{ avec } k \in [\![-n, n]\!]$$
$$\iff x_k + i = (x_k - i)e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \iff x_k\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right) = -i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right) \text{ avec } k \in [\![-n, n]\!]$$
$$\iff x_k = -i\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}} \text{ avec } k \in [\![-n, n]\!] \setminus \{0\}$$
$$\iff x_k = -i\frac{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}}{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}}\frac{e^{-\frac{ik\pi}{2n+1}} + e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}}{e^{-\frac{ik\pi}{2n+1}} - e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}} = -i\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$
On obtient finalement $\boxed{x_k = \text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) \text{ avec } k \in [\![-n, n]\!] \setminus \{0\}}$

2. (a) $Q_n(x^2) = 0 \iff P_n(x) = 0 \iff x = \text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in [\![-n, n]\!] \setminus \{0\}$
Donc, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\text{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ est racine de Q_n.
cotan est bijective sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $0 < \dfrac{k\pi}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2}$: on a donc trouvé n racines distinctes de Q_n. De plus, P_n est de degré $2n$ donc Q_n est de degré n.
Conclusion : $\boxed{Q_n(x) = 0 \iff x = \text{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) \text{ avec } k \in [\![1, n]\!]}$
On obtient la factorisation suivante :
$$\boxed{Q_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)}$$

(b) Comme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k X^{2(n-k)}$, on en déduit que $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k X^{n-k}$

Donc $\boxed{Q_n = (2n+1)X^n - \dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}X^{n-1} + \cdots + (-1)^n}$.

D'après les relations coefficients-racines, $\boxed{\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = \dfrac{n(2n-1)}{3}}$

De plus, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} - n = \tau_n - n$

donc $\tau_n = n + \sigma_n = n + \dfrac{n(2n-1)}{3}$ donc $\boxed{\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \dfrac{2}{3}n(n+1)}$

3. • Soit f la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sin x - x$.
   f est dérivable sur cet intervalle d'après les théorèmes généraux et $f'(x) = \cos x - 1 < 0$
   donc f est strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ d'où $f(x) < f(0)$ soit $\sin x < x$. De plus, $\sin > 0$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   • Soit g la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan x - x$.
   g est dérivable sur cet intervalle d'après les théorèmes généraux et $g'(x) = \tan^2 x > 0$ donc g est strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ d'où $g(x) > g(0)$ soit $\tan x > x$.
   On obtient l'encadrement suivant : $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[, 0 < \sin x < x < \tan x$
   soit finalement $\boxed{\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \text{cotan}^2 x < \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{\sin^2 x}}$.

4. Comme pour $k \in [\![1, n]\!]$, $0 < \dfrac{k\pi}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2}$ on en déduit alors que :

$$\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 < \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

   soit en sommant,

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

   En remplaçant à l'aide des expressions trouvées en 2 (b), on obtient finalement l'encadrement :
   soit $\boxed{\dfrac{n(2n-1)}{3} < \dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} < \dfrac{2n(n+1)}{3}}$

   d'où, $\dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{(2n-1)n}{(2n+1)^2} < S_n < \dfrac{2\pi^2}{3} \dfrac{n(n+1)}{(2n+1)^2}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{(2n-1)n}{(2n+1)^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2\pi^2}{3} \dfrac{n(n+1)}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

   D'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{\pi^2}{6}}$