DM n°6

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris dans $[0,n]$. Dans tout le problème la lettre p désignera toujours un nombre premier.

I. Une minoration de $\pi(n)$.

On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'entier $\Delta_n = \operatorname{ppcm}(1,2,\dots,n)$. Etant donnés $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $1 \leqslant b \leqslant a$, on pose

$$I(b,a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,\mathrm{d}x$$

1. Calcul de $I(b,a)$: première méthode.

   (a) Expliciter $I(1,a)$ en fonction de a.

   (b) Montrer que si $b < a$ alors $I(b+1,a) = \dfrac{b}{a-b} I(b,a)$.

   (c) En déduire que $I(b,a) = \dfrac{1}{b\binom{a}{b}}$.

2. Calcul de $I(b,a)$: deuxième méthode.

   (a) A l'aide de la formule du binôme, montrer que $\displaystyle\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k,a)$.

   (b) En calculant directement l'intégrale, montrer que $\displaystyle\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}$.

   (c) En déduire que $I(b,a) = \dfrac{1}{b\binom{a}{b}} = \dfrac{1}{a\binom{a-1}{b-1}}$.

3. (a) Montrer que $I(b,a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$.

   (b) En déduire que $I(b,a)\Delta_a \in \mathbb{N}$.

   (c) Prouver que l'entier $b\binom{a}{b}$ divise l'entier Δ_a.

4. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

   (a) Montrer que les entiers $n\binom{2n}{n}$ et $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divisent l'entier Δ_{2n+1}. On pourra remarquer que pour tout $k \geqslant 1$, Δ_k divise Δ_{k+1}.

   (b) En déduire que l'entier $n(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} en remarquant les entiers n et $2n+1$ sont toujours premiers entre eux.

   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a l'inégalité $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$.

   (d) En déduire que $(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant 4^n$ en développant l'égalité $4^n = (1+1)^{2n}$.

(e) En déduire que $\Delta_{2n+1} \geqslant n4^n$.

(f) Montrer que si $n \geqslant 9$ alors $\Delta_n \geqslant 2^n$ et vérifier que cette inégalité est encore vraie pour $n = 7$ et $n = 8$.

5. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

(a) Soit $p \in \mathscr{P}$, montrer que $p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n$.
(Indication : on commencera par exprimer $v_p(\Delta_n)$ en fonction des entiers $v_p(1), \dots, v_p(n)$).

(b) Montrer que $\Delta_n = \prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)}$.

(c) En déduire que $\Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}$.

6. Montrer que pour tout $n \geqslant 7$ on a

$$\pi(n) \geqslant \ln(2)\,\frac{n}{\ln(n)}$$

II. **Une majoration de $\pi(n)$.**

1. On cherche dans cette question à majorer simplement le produit $\prod_{p \leqslant n} p$ en fonction de l'entier $n \geqslant 1$.

(a) Soient a et b deux entiers tels que $0 < \frac{b}{2} \leqslant a < b$. Montrer que le produit $\prod_{a < p \leqslant b} p$ divise l'entier $\binom{b}{a}$.

(b) En déduire que pour tout $m \geqslant 1$, le produit $\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p$ divise l'entier $\binom{2m+1}{m+1}$.

(c) Comparer, pour $m \geqslant 1$, les entiers $\binom{2m+1}{m}$ et $\binom{2m+1}{m+1}$.

(d) En déduire que pour tout entier $m \geqslant 1$, $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$ en développant $(1+1)^{2m+1}$.

(e) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m$.

(f) Prouver finalement que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n$.
On pourra montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![1, 2n]\!], \prod_{p \leqslant k} p \leqslant 4^k$.

2. On admet que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $m! > \left(\frac{m}{e}\right)^m$.
En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, on a $\pi(n)! \leqslant 4^n$ et que par suite, on a $\pi(n)\ln\pi(n) - \pi(n) \leqslant n\ln(4)$.

3. On souhaite montrer, à partir du résultat précédent, que pour tout $n \geqslant 3$ on a

$$\pi(n) \leqslant e\,\frac{n}{\ln(n)}$$

Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 3$ tel que $\pi(n_0) > e\,\frac{n_0}{\ln(n_0)}$.

(a) Montrer que la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
En déduire que $\frac{e - \ln(4)}{e} < \frac{\ln(\ln(n_0))}{\ln(n_0)}$.

(b) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est majorée par e^{-1} sur $[1,+\infty[$. Conclure.

III. **Une minoration de $\pi(n)$.**

1. (a) $I(1,a) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^a}{a}\right]_0^1$ car $a \neq 0$, donc $\boxed{I(1,a) = \dfrac{1}{a}}$

(b) $I(b+1,a) = \displaystyle\int_0^1 x^b (1-x)^{a-(b+1)}\,\mathrm{d}x$.

On pose $\begin{cases} u = x^b & u' = bx^{b-1} \\ v' = (1-x)^{a-b-1} & v = -\dfrac{(1-x)^{a-b}}{a-b} \end{cases}$ avec u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

donc $I(b+1,a) = \left[-x^b \dfrac{(1-x)^{a-b}}{a-b}\right]_0^1 + \dfrac{b}{a-b}\displaystyle\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,\mathrm{d}x$

soit $\boxed{I(b+1,a) = \dfrac{b}{a-b} I(b,a)}$

(c) On pose pour tout $b \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(b)$: « $\forall a \geqslant b, I(b,a) = \dfrac{1}{b\dbinom{a}{b}}$ ».

• Au rang $b = 1$: Pour tout $a \geqslant 1$, $I(1,a) = \dfrac{1}{a}$ et $b\dbinom{a}{b} = \dbinom{a}{1} = a$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

• Soit $b \leqslant a-1$, supposons $\mathscr{P}(b)$ vraie.

$I(b+1,a) = \dfrac{b}{a-b} I(b,a) = \dfrac{b}{a-b} \times \dfrac{1}{b\dbinom{a}{b}}$ d'après l'hypothèse de récurrence (car $a \geqslant b$),

donc $I(b+1,a) = \dfrac{b!(a-b-1)!}{a!} = \dfrac{(b+1)!(a-(b+1))!}{(b+1)a!} = \dfrac{1}{(b+1)\dbinom{a}{b+1}}$

On a donc $\mathscr{P}(b+1)$ vraie.

• Conclusion : $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \text{ tel que } a \geqslant b, I(b,a) = \dfrac{1}{b\dbinom{a}{b}}}$

2. (a) $\displaystyle\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{a-1} \binom{a-1}{k} (xy)^k (1-x)^{a-1-k}\right) \mathrm{d}x$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{a-1} \int_0^1 \binom{a-1}{k} (xy)^k (1-x)^{a-1-k}\,\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{a-1} \binom{a-1}{k} y^k \int_0^1 x^k (1-x)^{a-1-k}\,\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\sum_{\ell=1}^{a} \binom{a-1}{\ell-1} y^{\ell-1} \int_0^1 x^{\ell-1} (1-x)^{a-\ell}\,\mathrm{d}x$ en posant $\ell = k+1$

donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k,a)}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1+(y-1)x)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1+(y-1)x)^a}{a(y-1)}\right]_0^1$ car $y \neq 1$

soit $\displaystyle\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{y^a - 1}{a(y-1)}$

Comme $y^a-1=(y-1)\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}$, donc $\boxed{\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}}$

La formule est trivialement vérifiée si $y=1$.

(c) On en déduit que $\sum_{k=1}^{a}\binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k,a) = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1} \iff \forall k \in [\![\, 1,a \,]\!],\ \binom{a-1}{k-1} I(k,a) = \frac{1}{a}$

d'après l'unicité de la décomposition d'un polynôme. Finalement, $\boxed{I(b,a) = \dfrac{1}{b\binom{a}{b}} = \dfrac{1}{a\binom{a-1}{b-1}}}$

3. (a) $I(b,a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{b-1}\sum_{k=0}^{a-b}\binom{a-b}{k}(-x)^k\,\mathrm{d}x$

$= \sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\int_0^1 x^{k+b-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\left[\frac{x^{k+b}}{k+b}\right]_0^1$

soit $\boxed{I(b,a) = \sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{1}{k+b}}$

(b) On a donc : $I(b,a)\Delta_a = \sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{\Delta_a}{k+b}$

$\forall k \in [\![\, 0,a-b \,]\!],\ k+b \in [\![\, b,a \,]\!]$. Or $\Delta_a = \mathrm{ppcm}\,(1,\dots,a)$ donc $\forall p \in [\![\, 1,a \,]\!],\ p \mid \Delta_a$ donc $k+b \mid \Delta_a$.

d'où $I(b,a)\Delta_a \in \mathbb{Z}$. De plus, $I(b,a) \geqslant 0$ et $\Delta_a \geqslant 0$ donc $\boxed{I(b,a)\Delta_a \in \mathbb{N}}$

(c) $I(b,a)\Delta_a \in \mathbb{N}$ soit $\dfrac{\Delta_a}{b\binom{a}{b}} \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{b\binom{a}{b} \text{ divise l'entier } \Delta_a}$

4. (a) D'après 3 (c), $n\binom{2n}{n} \mid \Delta_{2n}$.

Tout multiple commun à $1,2\dots 2n+1$ est multiple commun à $1,2\dots 2n$ donc Δ_{2n+1} est un multiple de Δ_{2n} soit $\Delta_{2n} \mid \Delta_{2n+1}$. On en déduit donc que $\boxed{n\binom{2n}{n} \mid \Delta_{2n+1}}$.

D'après 2 (c), $a\binom{a-1}{b-1}$ divise Δ. Comme $1 \leqslant n+1 \leqslant 2n+1$, on peut appliquer le résultat à $a=2n+1$ et $b=n+1$ soit $\boxed{(2n+1)\binom{2n}{n} \mid \Delta_{2n+1}}$.

(b) Comme $2n+1-2n=1$, d'après le théorème de Bézout, n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

D'après la question précédente, n divise $\dfrac{\Delta_{2n+1}}{\binom{2n}{n}}$ et $(2n+1)$ divise $\dfrac{\Delta_{2n+1}}{\binom{2n}{n}}$. Comme $n \wedge (2n+1) = 1$ alors $n(2n+1)$ divise $\dfrac{\Delta_{2n+1}}{\binom{2n}{n}}$ soit $\boxed{n(2n+1)\binom{2n}{n} \mid \Delta_{2n+1}}$.

(c) On pose $\forall k \in [\![\, 0,2n \,]\!],\ u_k = \binom{2n}{k} > 0$.

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{\binom{2n}{k+1}}{\binom{2n}{k}}=\frac{2n-k}{k+1} \text{ donc } \frac{u_{k+1}}{u_k}\leqslant 1 \iff 2n-k\leqslant k+1 \iff k\geqslant n-\frac{1}{2}$$

donc (u_k) est croissante sur $[\![0,n-1]\!]$ et décroissante sur $[\![n,2n]\!]$.

• $\forall k\in[\![n,2n]\!], u_k\leqslant u_n$ soit $\binom{2n}{k}\leqslant\binom{2n}{n}$.

• $\forall k\in[\![0,n-1]\!], u_k\leqslant u_{n-1}$ soit $\binom{2n}{k}\leqslant\binom{2n}{n-1}$. Or $\binom{2n}{n}=\frac{n+1}{n}\binom{2n}{n-1}\geqslant\binom{2n}{n-1}$.

Conclusion : $\boxed{\forall k\in[\![0,2n]\!], \binom{2n}{k}\leqslant\binom{2n}{n}}$.

(d) $4^n=(1+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\leqslant\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{n}$ soit $\boxed{(2n+1)\binom{2n}{n}\geqslant 4^n}$.

(e) Comme $n(2n+1)\binom{2n}{n}\,|\,\Delta_{2n+1}$, on a $\Delta_{2n+1}\geqslant n(2n+1)\binom{2n}{n}$ donc, d'après 4 (d), $\boxed{\Delta_{2n+1}\geqslant n4^n}$.

(f) • Si n est impair, alors $\exists k\in\mathbb{N}$, $n=2k+1$ et $\Delta_n=\Delta_{2k+1}\geqslant k4^k$.
Or $k=\frac{n-1}{2}$, d'où $\Delta_n\geqslant\frac{n-1}{2}2^{n-1}\geqslant 2^{n+1}$ si $n\geqslant 9$, d'où $\Delta_n\geqslant 2^n$
• Si n est pair, alors $\exists k\in\mathbb{N}$, $n=2k$ et $\Delta_n=\Delta_{2k}\geqslant\Delta_{2k-1}$.
Or $\Delta_{2k-1}=\Delta_{2(k-1)+1}\geqslant(k-1)4^{k-1}$ soit $\Delta_{2k-1}\geqslant\frac{n-2}{2}2^{n-2}\geqslant 2^n$ si $n\geqslant 9$.
Conclusion : $\boxed{\text{Si } n\geqslant 9 \text{ alors } \Delta_n\geqslant 2^n}$.
Pour $n=7$, $2^7=128$ et $\Delta_7=2\times3\times2\times5\times7=420$ donc $\Delta_7\geqslant 2^7$.
Pour $n=8$, $2^8=256$ et $\Delta_8=2\times3\times2\times5\times7\times2=840$ donc $\Delta_8\geqslant 2^8$.
On peut remarquer que l'inégalité n'est pas vérifiée pour $n=6$. En effet, $2^6=64$ et $\Delta_6=60$.

5. (a) Par définition du ppcm, $\boxed{v_p(\Delta_n)=\max(v_p(1),\dots,v_p(n))}$ donc il existe $k\in[\![1,n]\!]$ tel que $v_p(\Delta_n)=v_p(k)$ et par définition de $v_p(k)$ on a $p^{v_p(k)}\,|\,n$, d'où $\boxed{p^{v_p(\Delta_n)}\leqslant n}$.

(b) Par définition de la décomposition en produit de facteurs premiers, on a $\Delta_n=\prod_{p\in\mathscr{P}}p^{v_p(\Delta_n)}$.

De plus, d'après 5 (a), $p\leqslant p^{v_p(\Delta_n)}\leqslant n$ donc $\boxed{\Delta_n=\prod_{p\leqslant n}p^{v_p(\Delta_n)}}$.

(c) On obtient alors $\Delta_n=\prod_{p\leqslant n}p^{v_p(\Delta_n)}\leqslant\prod_{p\leqslant n}n=n^{\operatorname{card}\{p\leqslant n\}}$ soit $\boxed{\Delta_n\leqslant n^{\pi(n)}}$.

6. $\forall n\geqslant 7$, $\Delta_n\geqslant 2^n$ d'où $2^n\leqslant n^{\pi(n)}$ soit $n\ln(2)\leqslant\pi(n)\ln(n)$ soit $\boxed{\forall n\geqslant 7, \pi(n)\geqslant\ln(2)\frac{n}{\ln(n)}}$.

IV. <u>Une majoration de $\pi(n)$.</u>

1. (a) $\prod_{p\in\mathscr{P}\,|\,a<p\leqslant b}p$ divise $\prod_{k\in\mathbb{N}\,|\,a<k\leqslant b}k=\frac{b!}{a!}=(b-a)!\binom{b}{a}$.

Comme $0<\frac{b}{2}\leqslant a<b$, on a $a<b\leqslant 2a$ soit $0<b-a\leqslant a$ donc $\forall(p,k)\in\mathscr{P}\cap[\![a+1,b]\!]\times[\![1,b-a]\!]$, $p\wedge k=1$

d'où $p\wedge(b-a)!=1$ et donc $\left(\prod_{a<p\leqslant b}p\right)\wedge(b-a)!=1$.

D'après le théorème de Gauss, $\boxed{\displaystyle\prod_{a<p\leqslant b} p \text{ divise } \binom{b}{a}}$.

(b) On applique la relation précédente à $a=m+1$ et $b=2m+1$. En effet $\dfrac{b}{2}=m+\dfrac{1}{2}$ donc $0<\dfrac{b}{2}\leqslant a<b$.

d'où $\boxed{\forall m\geqslant 1,\ \displaystyle\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \text{ divise } \binom{2m+1}{m+1}}$.

(c) $\forall m\geqslant 1,$ $\boxed{\displaystyle\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{2m+1-m}=\binom{2m+1}{m+1}}$.

(d) $\forall m\geqslant 1,\ (1+1)^{2m+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}\geqslant\binom{2m+1}{m+1}+\binom{2m+1}{m}$ soit $2\times 4^m\geqslant 2\displaystyle\binom{2m+1}{m}$

d'où $\boxed{\displaystyle\binom{2m+1}{m}\leqslant 4^m}$.

(e) Comme $\displaystyle\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p$ divise $\displaystyle\binom{2m+1}{m+1}$, on a $\displaystyle\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p\leqslant\binom{2m+1}{m+1}$

d'où, $\boxed{\forall m\geqslant 1,\ \displaystyle\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p\leqslant 4^m}$.

(f) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\forall k\in[\![1,2n]\!],\ \displaystyle\prod_{p\leqslant k} p\leqslant 4^k$».

• Pour $n=1$, $k\in[\![1,2]\!]$
Si $k=1$, il n'y a pas de nombre premier $p\leqslant 1$ donc $\displaystyle\prod_{p\leqslant 1} p=\prod_{p\in\varnothing} p=1$ et $1\leqslant 4^1$
Si $k=2$, il n'y a que 2 comme nombre premier $p\leqslant 2$ donc $\displaystyle\prod_{p\leqslant 2} 2=2\leqslant 4^2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Soit $n\in\mathbb{N}^*$, spposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Soit $k\in[\![1,2n+2]\!]$. Si $k\in[\![1,2n]\!]$, d'après $\mathcal{P}(n)$, on a $\displaystyle\prod_{p\leqslant k} p\leqslant 4^k$.

Si $k=2n+1$ alors $\displaystyle\prod_{p\leqslant 2n+1} p=\left(\prod_{p\leqslant n+1} p\right)\times\left(\prod_{n+1<p\leqslant 2n+1} p\right)\leqslant 4^{n+1}\times 4^n$ donc $\displaystyle\prod_{p\leqslant 2n+1} p\leqslant 4^{2n+1}$.
Si $k=2n+2\notin\mathscr{P}$ alors $\displaystyle\prod_{p\leqslant 2n+2} p=\prod_{p\leqslant 2n+1} p$ d'où $\displaystyle\prod_{p\leqslant 2n+2} p\leqslant 4^{2n+1}\leqslant 4^{2n+2}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: $\forall k\in[\![1,2n]\!],\ \displaystyle\prod_{p\leqslant k} p\leqslant 4^k$ soit $\boxed{\forall m\geqslant 1,\ \displaystyle\prod_{p\leqslant n} p\leqslant 4^n}$.

2. Soit $n\geqslant 2$, posons p_k le $k$ème nombre premier : On a donc $p_k\geqslant k$.

Comme $p_k\leqslant n\iff k\leqslant\pi(n)$, on obtient $\displaystyle\prod_{p\leqslant n} p=\prod_{k=1}^{\pi(n)} p_k\geqslant\prod_{k=1}^{\pi(n)} k$ soit $\displaystyle\prod_{p\leqslant n} p\geqslant\pi(n)!$.

On en déduit, en utilisant la question précédente que $\boxed{\forall n\geqslant 2,\pi(n)!\leqslant 4^n}$.

On obtient $\ln(\pi(n)!)\leqslant n\ln(4)$. Or $\pi(n)!>\left(\dfrac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)}$ soit $\ln(\pi(n)!)>\pi(n)(\ln\pi(n)-1)$

d'où $\boxed{\pi(n)\ln\pi(n)-\pi(n)\leqslant n\ln(4)}$.

3. (a) Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)-x$.
f est dérivable sur $[1,+\infty[$ d'après les théorèmes généraux.
$f'(x)=\ln(x)\geqslant 0$ et $f'(x)=0\iff x=1$, donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [1,+\infty[}$.

Comme $\pi(n_0) > e\,\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}$, on en déduit que $f(\pi(n_0)) > f\left(e\,\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}\right)$.

soit $\pi(n_0)\ln\pi(n_0) - \pi(n_0) > e\,\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}\ln\left(e\,\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}\right) - e\,\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}$

d'où, d'après la question précédente, $n_0\ln(4) > e\,\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}\ln\left(e\,\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}\right) - e\,\dfrac{n_0}{\ln(n_0)}$

donc $\ln(4) > \dfrac{e}{\ln(n_0)}\left(1+\ln n_0 - \ln(\ln(n_0)) - 1\right)$, soit $\ln(4) > e - \dfrac{e\ln(\ln(n_0))}{\ln(n_0)}$

On obtient finalement $\boxed{\dfrac{e-\ln(4)}{e} < \dfrac{\ln(\ln(n_0))}{\ln(n_0)}}$.

(b) Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$, g est dérivable sur $[1,+\infty[$ d'après les théorèmes généraux.

$g'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} \geqslant 0 \iff 1-\ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant e$

Donc g est croissante sur $[1,e]$ et décroissante sur $[e,+\infty[$: g admet donc un maximum global en $x=e$ qui vaut $g(e) = e^{-1}$.

On obtient alors $g(n_0) = \dfrac{\ln(\ln(n_0))}{\ln(n_0)} \leqslant \dfrac{1}{e}$ d'où, d'après la question précédente, $\dfrac{e-\ln(4)}{e} < \dfrac{1}{e}$

soit $1+\ln(4) > e$ qui est absurde. On en déduit donc que $\boxed{\pi(n) \leqslant e\,\dfrac{n}{\ln(n)}}$.