Exo 14 :

$P = X^3 + 2X - \pi$. Calculer $S_n = a^n + b^n + c^n$ pour $n \in \{-2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3\}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ on note : a, b et c ses 3 racines avec multiplicité éventuelle. On sait que

$$P = \lambda_3 (X-a)(X-b)(X-c)$$
$$= \lambda_3 (X^2 - (a+b)X + ab)(X-c)$$
$$= \lambda_3 (X^3 - (c+a+b)X^2 + (ca+cb+ab)X - abc)$$

donc par identification on a :

$$\begin{cases} \lambda_3 = 1 \\ -(c+a+b) = 0 \iff a+b+c = 0 \qquad \text{donc } \boxed{S_1 = 0} \\ ca + cb + ab = 2 \\ -(abc) = -\pi \iff abc = \pi \end{cases}$$

Pour $S_n = a^n + b^n + c^n$ on pose $\underline{n = 2}$ donc on a

$$(a+b+c)^2 = 0$$
$$(a+b+c)(a+b+c) = 0$$
$$a^2 + ab + ac + b^2 + ba + bc + c^2 + ca + cb$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ca + cb + ab)$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 2 = 0$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = -4 \quad \text{donc } \boxed{S_2 = -4}$$

Calcul pour $\underline{n = -1}$ on a :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ca + cb + ab}{abc} = \frac{2}{\pi} \quad \text{donc } \boxed{S_{-1} = \frac{2}{\pi}}$$

Calcul pour $\underline{n = -2}$ Calculons

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$$
$$\frac{2^2}{\pi^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$
$$\frac{4}{\pi^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ba} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{cb}$$
$$\frac{4}{\pi^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ac}$$
$$\frac{4}{\pi^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \underbrace{\boxed{\frac{2c + 2a + 2b}{abc}}}_{= 0}$$

donc $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{4}{\pi^2}$ donc $\boxed{S_{-2} = \frac{4}{\pi^2}}$

Les racines de $X^3 + 2X - \pi = 0$ vérifient

$$\begin{cases} a^3 = -2a + \pi \\ b^3 = -2b + \pi \\ c^3 = -2c + \pi \end{cases}$$

donc
$$a^3 + b^3 + c^3 = -2a - 2b - 2c + 3\pi$$
$$= -2(a+b+c) + 3\pi$$
$$= -2 \times 0 + 3\pi$$
$$= 3\pi$$

donc $\boxed{S_3 = 3\pi}$