Exercice 23 :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k^3+3k^2+2k}$$

Soit $F = \dfrac{X+3}{X^3+3X^2+2X} = \dfrac{P}{Q}$

On a -1 une racine évidente de Q alors $Q = (X+1)(X^2+2X) = X(X+1)(X+2)$

On a donc $\boxed{F = \dfrac{X+3}{X(X+1)(X+2)}}$, F est donc sous sa forme irréductible et $\deg(F) = 1-3 = -2$ donc sa partie entière est nulle

Ainsi $F = \dfrac{X+3}{X(X+1)(X+2)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{X+2}$

<u>Déterminons a, b et c :</u> Multiplions par X : $XF = \dfrac{X+3}{(X+1)(X+2)} = a + \dfrac{Xb}{X+1} + \dfrac{Xc}{X+2}$

Evaluons en 0 : $\boxed{\frac{3}{2} = a}$

Multiplions par $X+1$: $(X+1)F = \dfrac{X+3}{X(X+2)} = \dfrac{(X+1)a}{X} + b + \dfrac{(X+1)c}{X+2}$

Evaluons en -1 : $\boxed{-2 = b}$

Multiplions par $X+2$: $(X+2)F = \dfrac{X+3}{X(X+1)} = \dfrac{(X+2)a}{X} + \dfrac{(X+2)b}{X+1} + c$

Evaluons en -2 : $\boxed{\frac{1}{2} = c}$

Ainsi $\boxed{F = \dfrac{3/2}{X} + \dfrac{-2}{X+1} + \dfrac{1/2}{X+2}}$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{S_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3/2}{k} + \frac{-2}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3/2}{k} - \frac{3/2}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/2}{k+2} - \frac{1/2}{k+1}\right)$$

On reconnaît deux sommes télescopiques

$$= \frac{3/2}{1} - \frac{3/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} - \frac{1/2}{2}$$

$$= \boxed{\frac{5}{4} - \frac{3}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}}$$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{5}{4}}$ ainsi S_n converge et sa limite vaut $\frac{5}{4}$

Exercice 21 :

1) $F = \dfrac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)} = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(X+k)}$ $\qquad \deg(F) = -(n+1) < 0$ donc sa partie réelle est nulle

F est sous sa forme irréductible il a comme pôles tous simples : $-1, -2, \dots, -n$

On a donc $\boxed{F = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{X+k}}$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$, Multiplions par $(X+i)$: $(X+i)F = \dfrac{n!}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}(X+k)} = a_i + (X-i)\left(\sum_{k\neq i} \dfrac{a_k}{X+k}\right)$

Evaluons en $-i$: $\dfrac{n!}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}(-i+k)} = a_i$

donc $a_i = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{i-1} -(i-k) \times \prod_{k=i+1}^{n}(k-i)} = \dfrac{n!}{(-1)^i i! \times (n-i)!}$

Ainsi $\boxed{a_i = (-1)^i \binom{n}{i}}$

Ceci étant valable pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $a_k = (-1)^k \binom{n}{k}$

On a donc $\boxed{F = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k \binom{n}{k}}{(X+k)}}$

2) On a $F(1) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k+1}$ mais aussi $F(1) = \dfrac{n!}{1\times 2\times 3\times \cdots \times (n+1)} = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$

Ainsi $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}}$