TD 18

Exercice 4 :

1) On pose $m = pq$ avec p impair et q une puissance de 2 (2^k avec $k \in \mathbb{N}$)

Alors $2^m + 1 = 2^{qp} + 1 = (2^q)^p + 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif, on a $x^p + 1 = x^p - (-1)^p = (x+1)\left(\sum_{k=0}^{p-1} x^k (-1)^{p-1-k}\right)$ ✓
car q impair

Alors $2^m + 1 = (2^q)^p - (-1)^p = (2^q + 1)(2^{q(p-1)} - 2^{q(p-2)} + 2^{q(p-3)} - \dots + 1)$ ✓

Comme $2^m + 1$ est premier et $2^q + 1 \mid 2^m + 1$ alors $2^q + 1$ est égal à 1 ou $2^m + 1$. ✓
Or $q = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ ainsi $q \geq 1$ donc $2^q + 1 \geq 3$

Ainsi $\boxed{2^q + 1 = 2^m + 1}$ ✓ donc $q = m = pq$ donc $p = 1$ ✓ et $\boxed{m = q = 2^k}$ avec $k \in \mathbb{N}$

Donc m est une puissance de 2. ✓

2) $F_n = 2^{2^n} + 1$ or $2^{2^n} = 2 \times 2^{2^n - 1}$ donc est multiple de 2 donc pair (on peut bien le faire car $2^n \geq 1$ car $n \geq 0$ donc $2^{2^n - 1} \geq 1$)

Ainsi $2^{2^n} + 1$ est impair i.e. F_n est impair ✓

3) (a) $F_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1$

et $(F_n - 1)^2 + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1$

Donc $\boxed{F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1}$ ✓

(b) Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} - 2$ "

$\boxed{\text{Initialisation}}$ pour $n = 0$, $F_0 = 3$ et $F_1 - 2 = 4 + 1 - 2 = 3$ ce qui prouve $\mathcal{P}(0)$ ✓

$\boxed{\text{Hérédité}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$,

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n+1} F_k} = \left(\prod_{k=0}^{n} F_k\right) \times F_{n+1}$$

$$= F_{n+1}^2 - 2F_{n+1} + 1 - 1$$

$$= (F_{n+1} - 1)^2 + 1 - 2$$

$$= \boxed{F_{n+2} - 2}$$ ✓

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$

$\boxed{\text{Conclusion}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vrai ✓

4) Soit $m \neq n$, quitte à intervertir on suppose $m > n$ on a :

$$F_m = \prod_{k=0}^{m-1} F_k + 2 \quad \text{donc} \quad F_m = F_n \times \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{m-1} F_k + 2 \qquad \text{car } 0 \leqslant n \leqslant m-1$$

Ainsi $F_m \wedge F_n \overset{*}{=} F_n \wedge 2$ or F_n est impair alors $F_n \wedge 2 = 1$ ✓

Donc $\boxed{F_m \wedge F_n = 1}$ ✓

* Car dans la division euclidienne de F_m par F_n, le reste vaut 2 (et le quotient vaut $\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 2}}^{m-1} F_k$ mais cela n'est pas utilisé).