ex4

Exercice 4 : TD - 17

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrons que f est continue. $\mathcal{C}^\infty$

f est la composée de fonctions ✓ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0, +\infty[$ donc est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

De plus :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x)} = \lim_{x \to 0} \exp\Big(\underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} -\infty}\Big) = 0 = \boxed{f(0)}$$

Donc f est continue en 0 et f est continue sur $\mathbb{R}$. ✓

2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ avec : ~~$f^{(n)}(x)$~~

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$ où P_n est un polynôme

Mq f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et donner l'expression $f^{(n+1)}$.

On a $f^{(n)}$ dérivable en tant que composée de fonctions dérivables

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) ✓ + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Posons $X := \frac{1}{x}$

$$f^{(n+1)}(X) = \exp(-X^2) \underbrace{\Big(-X^2 \underbrace{P_n'(X)}_{\text{Un polynôme car dérivé d'un polynôme.}} + 2X^3 P_n(X)\Big)}_{\text{un polynôme en } X} ✓$$

Pas immédiat.

Or $$\boxed{\lim_{x \to 0} f^{(n+1)}(x)} = \lim_{X \to +\infty} f^{(n+1)}(X) \underset{\text{T.C.C}}{=} 0 = \boxed{f^{(n+1)}(0)}$$

Donc $f^{(n+1)}$ ~~est continue sur~~ $\mathbb{R}$. → d'après le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ on a

Finalement : f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

3. Mq f est de ~~call~~ classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n}$ $:= \mathcal{P}(n)$

I] pour $n = 0$, on a mq f est continue donc de classe $\mathcal{C}^0$.

H] soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ *.

i.e. f est de classe $\mathcal{C}^n$

On a mq (dans le 2) que si f est de classe $\mathcal{C}^n$, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$

Conclusion :

D'après le thm de récurrence, on a $\mathcal{P}(n)$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

i.e. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ $\square$

GRADEL-PIET Marceau
GESLIN Billy
DURAND Océan
} MPSI

* $\forall k \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^k} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty} y^{k/2} \exp(-y)$ (avec $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$)

$= 0$ par T.C.C

Puis par somme de limites,

$\lim\limits_{x \to 0^+} \sum \frac{a_k}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ aussi

(raisonnement presque identique pour $\lim\limits_{x \to 0^-}$)