[illegible]

Ex 8

Soit $P = X^n + \alpha X + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \geq 2$.

Supposons que pour un certain n, P admettent au moins 4 racines réels qu'on note x_1, x_2, x_3 et x_4 et tq $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

Ainsi $P(x_1) = P(x_2)$ comme P est un polynome il est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après le thm de Rolle :

$\exists c_1 \in]x_1, x_2[, \; P'(c_1) = 0$

Comme $P(x_2) = P(x_3)$ et $P(x_3) = P(x_4)$

$\exists (c_2, c_3) \in]x_2, x_3[\times]x_3, x_4[, \; P'(c_2) = P'(c_3) = 0$

or $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, P'(X) = nX^{n-1} + a$

Donc $nc_1^{n-1} = nc_2^{n-1} = nc_3^{n-1}$

Donc $c_1^{n-1} = c_2^{n-1} = c_3^{n-1}$ car $n \geq 2$

or c_1, c_2 et c_3 sont dans $\mathbb{R}$ de plus, $c_1 \neq c_2 \neq c_3$ donc impossible.

Ainsi P ne peut pas admettre plus de 3 racines reels.