TD 17 - Dérivation.

Cadijee Madtha.
Gaourhanidy Ounadeery
Ali Djannah

Exercice 2

a) $f(x) = \begin{cases} x + a + be^x & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(x) - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = a + b$ ✓ Pour que f soit continue en 0 et de classe C^0 il faut que $a + b = 1$ ✓

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ ✓

et il suffit

On va voir si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 + b$ ✓

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -\sin(x) - 1 = -1$ ✓

Pour que f' soit continue en 0 et de classe C^1 il faut que $1 + b = -2$ donc $\boxed{b = -2 \text{ et } a = 3.}$ ✓

On va voir si f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

On a $\lim_{x \to 0^+} f''(x) = -2$ ✓

$\lim_{x \to 0^-} f''(x) = \lim_{x \to 0^-} -\cos(x) = -1$

on a $-2 \neq -1$ donc f n'est pas de classe C^2. ✓

b) $g(x) = x|x|$ On distingue 2 cas :

si $x > 0$ on a $g(x) = x^2$ ✓

si $x < 0$ on a $g(x) = -x^2$ ✓

on a $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0^2 = 0$

$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -0^2 = 0$

donc g continue en 0 et de classe C^0. ✓

On va voir si g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

On a $\lim_{x \to 0^+} g'(x) = 2x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} g'(x) = -2x = 0$

donc g' est continue en 0, et de classe C^1 d'après le thm de prolongement de classe C^1.

On va voir si g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

On a $\lim_{x \to 0^+} g''(x) = 2$

$\lim_{x \to 0^-} g''(x) = -2$

On a $2 \neq -2$ donc g'' n'est pas continue en 0 et donc g n'est pas de classe C^2. ✓

c). $h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ on pose $X = \cancel{\lim_{x \to 0}} \frac{1}{x} = \cancel{+\infty}$. qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0

on a $-1 \leq \sin(X) \leq -1$

$\underset{\substack{\longrightarrow 0 \\ x \to 0}}{-x^2} \leq x^2 \sin(X) \leq \underset{\substack{\longrightarrow 0 \\ x \to 0}}{-x^2}$ ✓

D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$ ✓

On peut donc prolonger par continuité $h(0) = 0$. ✓

donc h continue en 0.

On va verifier la dérivabilité en 0 pour voir si l'application h est de classe $\mathcal{C}^0$:

On a $\dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. par récurrence.

et $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f'(0)$. ✓

On va voir si h est de classe $\mathcal{C}^1$?

on a $h'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \dfrac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ✓

On a $\lim\limits_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $-1 \leqslant \sin(X) \leqslant 1$ avec $X = \frac{1}{x}$

$\underbrace{-2x}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0} \leqslant 2x \sin(X) \leqslant \underbrace{2x}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}$.

et $\lim\limits_{x \to 0} -\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite finie car on a $-1 \leqslant \cos(X) \leqslant 1$.

$1 \geqslant -\cos(X) \geqslant -1$.

donc h est classe $\mathcal{C}^0$ au maximum car elle h' n'admet pas de limite finie

donc h n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ ✓ → Mais elle est quand même dérivable en 0.