FOUDRAT Yohan
BEURRIE Loukas

TD 17 : Dérivation

Ex13 : Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Prouvons l'inégalité suivante :

$$(I) : \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

On remarque que l'on passe d'un produit à une somme.

On voudrait alors appliquer $\ln$ (c'est bien positif)

Or $\ln$ est concave pour pouvoir avoir une fonction convexe on applique $-\ln$

~~On peut alors appliquer l'inégalité de Jensen :~~ Preuve : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$(I) \iff -\ln\left((a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}\right) \geq -\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \quad \cancel{+\ln(x)} \; -\ln''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$$

$$\iff -\frac{1}{n} \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) \geq -\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \checkmark$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} -\frac{\ln(a_i)}{n} \geq -\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \checkmark$$

On remarque alors l'inégalité de Jensen avec ~~$\forall i \; \lambda_n = \frac{1}{n}$~~

$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, $\forall i \in \boxed{[\![1, n]\!]}$ $\lambda_i = \frac{1}{n}$

et la fonction f correspond à $-\ln$ qui est bien convexe. ✓

donc l'inégalité est vraie.

Ex14 : Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f et g sont convexes et g est croissante.

Par définition $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall \lambda \in [0 ; 1]$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x) \checkmark$$

et $$g((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \lambda g(y) + (1-\lambda) g(x) \checkmark$$

Comme g est croissante : on peut appliquer g à la 1^{ere} inégalité et on trouve

$$g(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq g(\lambda f(y) + (1-\lambda) f(x))$$

de plus g est convexe. et $f(x) \in \mathbb{R}$ et $f(y) \in \mathbb{R}$, par définition

~~donc~~ $$g(\lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)) \leq \lambda g(f(y)) + (1-\lambda) g(f(x)) \checkmark$$

On a bien :

$g\circ f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant \lambda g\circ f(y)+(1-\lambda)\, g\circ f(x)$ ✓

Ainsi $g\circ f$ est bien convexe. ✓

Exercice 7-

On a h qui est continue sur $[a,b]$ et h' existe sur $]a,b[$ car somme de telle fonctions.

On peut écrire h sous la forme de somme :

$\forall x\in[a,b]$

$$h(x)=f(b)-\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(b-x)^i}{i!}f^{(i)}(x)\right)-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A$$ ✓

On sait que h est dérivable donc :

$\forall x\in]a,b[$

$$h'(x)=-f'(x)+f'(x)-(b-x)f''(x)+\dots+$$

$$=-f'(x)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(b-x)^{i-1}}{(i-1)!}f^{(i)}(x)-\frac{(b-x)^{i}}{i!}f^{(i+1)}(x)\right)+\frac{(b-x)^n}{n!}A$$ ✓

C'est une somme téléscopique, on a donc :

$$h'(x)=-f'(x)+\left(f'(x)-\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\right)+\frac{(b-x)^n}{n!}A$$ ✓

$$=\frac{-(b-x)^n}{n!}\left(f^{(n+1)}(x)-A\right)$$ ✓

~~On cherche A de sorte à avoir~~ On remarque que $h(b)=0$.

~~On remarque $h(b)=0$~~

C'était correct

Comme on veut appliquer le théorème de Rolle, on cherche A pour avoir $h(a)=0$.

On obtient

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$$

$$A = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left(f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right)$$

On a donc $h(a)=0$ et $h(b)=0$, h continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ on peut appliquer le théorème de Rolle :

$\exists d \in]a,b[\,/\, h'(d)=0$

donc $0 = -\frac{(b-d)^n}{n!}\left(f^{(n+1)}(d) - A\right)$

Or $b \neq d$ donc on a :

$A = f^{(n+1)}(d)$

On a donc $\overset{0}{h(a)} = f(b) - \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)\right) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(d)$

i.e $\Leftrightarrow f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(d)$

T.B