Julie
Sarah

TD 17

Exo 11 : $f(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$

1). Il faut $2 - \ln(x) \geq 0$ et $x > 0$

$\iff \ln(x) \leq 2$

$\iff x \leq e^2$

donc $D_f =]0, e^2]$

• $\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+}$ $\mathbb{R}^{+*}$ *

et $D_f \subset \mathbb{R}^{+*} \subset \mathbb{R}^{+}$,

donc f est dérivable sur $]0, e^2[$ et $\forall x \in]0, e^2[$

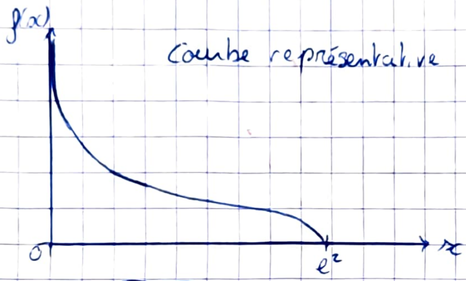
• $f'(x) = -\frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{2-\ln(x)}} = -\frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}} < 0$

donc f est strictement décroissante sur $]0, e^2]$

x	0		e^2
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$f(e^2) = \sqrt{2-2} = 0$



2). • $f(1) = \sqrt{2 - \ln(1)} = \sqrt{2}$

$f(e) = \sqrt{2-1} = 1$

car $f \searrow$

$f([1, e]) = [1, \sqrt{2}] \subset [1, e]$ donc $[1, e]$ est stable par f.

• On pose $g(x) := f(x) - x$ $D_g = [1, e]$

$g(1) = f(1) - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$

$g(e) = f(e) - e = 1 - e < 0$

donc $g : \begin{cases} [1, e] \to [1-e, \sqrt{2}-1] \\ x \mapsto f(x) - x \end{cases}$

g est continue car c'est une somme de fonctions continues.

g est strictement décroissante car c'est une somme de fonctions strictement décroissantes.

et $0 \in [1-e, \sqrt{2}-1]$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée a.

$g(x) = 0 \iff f(a) - a = 0$

donc $f(a) = a$ donc f admet un unique point fixe a sur $[1, e]$

3) $f'(x) = \frac{1}{-2x\sqrt{2-\ln(x)}}$

$|f'(x)| = \frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}}$

sur $[1, e]$; • $x \geq 1$

• $\sqrt{2-\ln(x)} \geq 1$ car $\ln(x) \leq 1$.

donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

f est continue sur $[1, e]$ et dérivable sur $[1, e]$ ✓

$|f'| \leq \frac{1}{2}$ ✓ sur $[1, e]$ et $(u_n, a) \in [1, e]^2$

donc d'après l'inégalité des accroissements finis

$$|\underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} - \underbrace{f(a)}_{=a}| \leq \frac{1}{2} |u_n - a| \checkmark$$

donc $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$ ✓

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n)$: $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (e-1)$

Initialisation : pour $n=0$: $a \in [1; e]$

~~Donc min a~~ ≥ 1

donc $\max(u_0 - a) = u_0 - \min a$

$= u_0 - 1$

$= 1 - 1$

$= 0 \quad \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 (e-1)$

$\leq (e-1)$

Dire plutôt $u_0 = e$, $u_0 - a \geq u_0 - 1 \geq 0$

donc $|u_0 - a| \leq e - 1$.

ce qui prouve $P(0)$ /

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$.

D'après l'IAF : $|f(u_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$

D'après $P(n)$: $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (e-1)$ ✓

donc : $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (e-1)$

$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (e-1)$ ✓ ce qui prouve $P(n+1)$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $P(n)$ vraie. ✓

- $-\left(\frac{1}{2}\right)^n (e-1) + a \leq u_n \leq a + \left(\frac{1}{2}\right)^n (e-1)$ ✓

$\left|\frac{1}{2}\right| \leq 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n (e-1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ✓

donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ /

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a.

- Pour une précision de 10^{-2}, on veut $\left(\frac{1}{2}\right)^n (e-1) \leq 10^{-2}$

donc il suffit que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10^{-2}}{(e-1)}$ / car $e-1>0$

$$n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln\left(\frac{10^{-2}}{e-1}\right) \ /$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-2}}{e-1}\right)}{-\ln(2)}$$

$$n \geq 7{,}42 \rightarrow \text{on prend la partie entière supérieure.}$$

donc $\boxed{n_0 = 8}$ ✓