Kamil.
Nino
Hugo

Exercice 10

a) On a $\sqrt{10001} \simeq 100$

On définit $f \begin{cases} [10\,000 ; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

On a $\forall x \in [10\,000, +\infty[\; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ✓

Or $f'(10\,000) = \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200}$

$\forall x \geq 10000$

Ainsi $|f'(x)| \leq \frac{1}{200}$ car $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est décroissante.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$|f(10\,001) - f(10\,000)| \leq \frac{1}{200} |10001 - 10000|$ ✓

Donc $\boxed{|f(10\,001) - f(10\,000)| \leq \frac{1}{200}}$ ✓.

b) On a $\frac{1}{0{,}999^2} \simeq 1$

On définit $g \begin{cases} [0{,}999, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^2} \end{cases}$

On a $\forall x \in [0{,}999, +\infty[\; f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

Or $g'(0{,}999) = \frac{-2}{0{,}999^3}$

Donc $|g'(x)| \leq \left|\frac{-2}{0{,}999^3}\right| \leq 3$ ✓ car g' ↓ sur l'intervalle.

$\forall x \in [0{,}999, 1]$

Ainsi d'après l'IAF avec cet intervalle et la fonction g on a :

$|g(0{,}999) - g(1)| \leq 3 \; |0{,}999 - 1|$ ✓

Donc $\boxed{|g(0{,}999) - g(1)| \leq 0{,}003}$ ✓

c) On a $\cos 1 \simeq \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3})$

On définit $R \begin{cases} [0;\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$ ✓

Ainsi $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $R'(x) = -\sin(x)$

Or, ~~$R'(0) = 0$~~

~~$R'(\frac{\pi}{2}) = -1$~~

$|\sin| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $[0;\frac{\pi}{2}]$

Ainsi $|R'(x)| \leq 1$

D'où $|R(1) - R(\frac{\pi}{3})| \leq 1 |1 - \frac{\pi}{3}|$ ✓

Donc $\boxed{|R(1) - R(\frac{\pi}{3})| \leq |1 - \frac{\pi}{3}|}$ ✓

Or, $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15$

d'où $\frac{3{,}14}{3} \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{3{,}15}{3}$

Ainsi $-\frac{0{,}14}{3} \geq 1 - \frac{\pi}{3} \geq -\frac{0{,}15}{3}$

D'où $|\frac{0{,}14}{3}| \leq |1 - \frac{\pi}{3}| \leq |\frac{0{,}15}{3}| = 0{,}05$

Donc $\boxed{|R(1) - R(\frac{\pi}{3})| \leq \frac{0{,}15}{3}} = 0{,}05.$